المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية

صلاح على مبخوت

قسم الرياضيات

جامعة ذمار - اليمن

المقدمة

تعتبر المعادلات التفاضلية – بشقيها العادية و الجزئية – من أهم فروع الرياضيات التطبيقية و لا غنى لكافة العلوم التطبيقية – الفيزياء ، الفلك ، الكيمياء ، الأحياء ، ... – عنها . تعبر المعادلة التفاضلية عن نظام حركي مثل حركة الكواكب ، المقذوفات ، انتقال الموجة ، انتشار الحرارة و نمو المجتمعات السكانية . حيث تحكم المعادلة التفاضلية سلوك الأنظمة الحركية و من خلال حلنا للمعادلة التفاضلية نستطيع أن نتحسس سلوك هذا النظام ونتنبأ بسلوكه في الماضي أو في المستقبل . المعادلة التفاضلية العادية – تتعلق بدالة في متغير واحد - مثلا معادلة الحركة لنيوتن

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{m}{h^2}$$

تحكم مسارات الكواكب حول الشمس و تتكهن بسلوكها وموقعها في أي لحظة . لكن نجد أن مسار كوكب عطارد – الأقرب للشمس – ينحرف عن مساره المفترض حسب معادلة نيوتن. استطاع إينشتاين أن يصحح معادلة الحركة لنيوتن بإضافة الحد اللاخطي $3mu^2$ (من وحي معادلات المجال) لتصبح

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{m}{h^2}+3mu^2$$

والحد اللاخطي الأخير يعبر عن الإضطراب الذي يؤدي إلى زحزحة مدار نيوتن بمقدار $6m^2\pi/h^2$

مما يتفق مع مدار عطارد حول الشمس . وهذه الزحزحة في مدار عطارد- الأقرب للشمس- نتيجة لأن مجال جاذبية الشمس يلوي فضاء الزمان المجاور له

بشدة. إذا لم يتم الوصول إلى حلول تحليلية يمكن الوصول إلى حلول تقريبية عبر الحلول العددية للمعادلات التفاضلية . معرفة الشروط الإبتدائية للنظام – الذي تعبر عنه المعادلة التفاضلية – مهم جداً ويعتمد عليها في استقراء مستقبل سلوك النظام قيد الدراسة . كلما علمنا الظروف الأولية والشروط الإبتدائية لنظام ما بدقة كلما استطعنا التكهن وبدقة عن سلوكه مستقبلاً . بالطبع قد يتعذر توفر الشروط الإبتدائية بشكل كافي وبهذا الصدد يقول الفيلسوف و الرياضي لابلاس (لو قدر لكائن أن يلم بالظروف الإبتدائية التي نشأ عنها الكون من مادة وزمان ومكان والكتلة والسرعة والحرارة والضغط ويمتلك عقلية لتحليل هذه المعالم والمعطيات لاستطاع أن يعلم يقيناً مستقبل سلوك الكون) . هنا وبدون وعي كأنما يشير لابلاس إلى الله سبحانه وتعالى الذي يمتلك بالطبع تلك المقدرات الذي أشار إليها لابلاس آنفاً وذلك يتجلى جليا في قوله تعالى ((ألا يعلم من خلق و هو اللطيف الخبير)) وقوله ((هو أعلم بكم إذ أنشأكم من الأرض وإذ أنتم أجنةً في بطون أمهاتكم)) ومن هذا المنطلق فإن الله سبحانه وتعالى يعلم غيب السماوات والأرض .

المعادلة التفاضلية الجزئية – وهي تتعلق بدالة في أكثر من متغير – محورية لفهم الفيزياء :-

- معادلة الموجة تحكم انتقال الضوء والصوت وموجات الماء .
- معادلة الحرارة تحكم انتشار الحرارة
- معادلة الإنتشار تصف فيض الجسيمات والطاقة
- معادلة شرودنجر الموجية تتكهن بخواص وسلوك الأنظمة الذرية والجزئية و تعتبر العمود الفقري لنظرية الكم .

- معادلة Klein-Gordan وهي معادلة من الرتبة الثانية في كلٍ من الزمن والفراغ

$$\psi_{xx}(x,t) - (1/c^2)\psi_{tt}(x,t) - (m^2c^2/h^2)\psi(x,t) = 0$$

- معادلة ديراك Dirac النسبية للموجة وهي عبارة عن الجذر التربيعي لمعادلة كلين- قوردان.إلا أن حلول ديراك و كلين- قوردان يعتريهما ضرب من اللاإستقرارية تتمثل – تكشف عن هويتها – عبر خلق وعدم جسيمات فعلية من فضاء خالي تماماً ويمكن بدقة حساب خلق وعدم الجسيمات الفعلية من خلال أشكال Feynman. عملية خلق وعدم الجسيمات من الفراغ هذه تعرف بتراوحات كم الفراغ vacuum quantum fluctuation

وهي أن جسيمات من المادة و نقيضها تتخلق فقط من لا شئ ، حيث يختل قانون بقاء الطاقة، وسريعاً ما تلاشي هذه النقائض بعضها البعض ليستعيد قانون بقاء الطاقة عافيته مجدداً. وهناك تجربة Casimir الشهيرة التي تحقق تخلق الجسيمات عبر تراوحات الكم. لقد كانت معادلة ديراك أول من تنبأت بوجود نقيض المادة . إذ نجد أن حل معادلة الموجة النسبية لديراك يتضمن طاقة سالبة تتعلق بجسيمات لها طاقة وضع سالبة وكتلة سكون أيضاً سالبة . ديراك افترض استحالة انتقال الطاقة من المدارات الموجبة إلى المدارات السالبة لأن هذه العملية تتطلب تحرير طاقة لانهائية وهذا لا يتحقق في الطبيعة وعليه فإن مدارات الطاقة السالبة ليست شاغرة لاستقبال أي انتقال إليها وفق قاعدة الإقصاء . الوضع الطبيعي للفراغ يحتوي على كثافة لانهائية من إلكترونات طاقتها سالبة لا يمكن رصدها إذ لا تأثير مغناطيسي لها أو جذبوي ، فقط هناك انحراف (عن البعد norm) ناتج عن خلو وتفريغ واحد أو أكثر من حالات الطاقة السالبة عن طريق قفزة – تزيد عن $2mc^2$ وهو المدى الفاصل بين حالات الطاقة السالبة وحالات

الطاقة الموجبة – لتعبر إلى مدارات الطاقة الموجبة . إن غياب هذا الإلكترون سالب الشحنة و الكتلة وطاقة الوضع يتوقع رصده وملاحظته في مدارات الطاقة الموجبة ليكشف عن نفسه كجسيم شحنته موجبة وله نفس القدر من الكتلة الموجبة وطاقة الوضع الموجبة فيما يعرف بنظرية الثقب للبوسترون . تم رصد البوسترون – الإلكترون موجب الشحنة – في الأشعة الكونية لاحقاً . باختصار إن اختفاء كم من الطاقة – مثل الفوتون – يظهر عبر تخلق زوج من الجسيمات الإلكترون ومضاده البوسترون. كل هذه المعرفة العلمية و العملية أنى تأتت لنا ؟ فقط من المعادلات التفاضلية . كل هذه المقدمة و الذي اعتبرها ضرب من التشويق أقدمها كإجابة للسؤال الذي يتكرر كثيراً من الطلاب حتى على مستوى الجامعيين : ما فائدة الرياضيات ؟.

المؤلف يتضمن ثلاثة مقررات

معادلات تفاضلية عادية

دوال خاصة

معادلات تفاضلية جزئية

صلاح علي مبخوت

المحتويات

الباب الأول

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

تصنيف المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية العادية هي التي تحتوي على تفاضل عادي مثل :

$$\frac{dy}{dx}+y=b\ldots(1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+b=0\ldots(2)$$

المعادلات التفاضلية الجزئية و هي المعادلات التي تحتوي على تفاضل جزئي مثل معادلة الموجة و معادلة الحرارة :

$$\frac{\delta^2 y}{\delta t^2}=c^2\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}\ldots(3)$$

$$\frac{\delta u}{\delta t}=k\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\ldots(4)$$

رتبة المعادلة التفاضلية و درجتها :

المعادلة $\frac{dy}{dx}+ay=b$ من الرتبة الأولى و الدرجة الأولى .

المعادلة $(y'')^3-3\tan y=e^x$ من الرتبة الثانية و الدرجة الثالثة .

تكوين المعادلة التفاضلية :

مثال 1

معدل النمو على الوحدة في مجتمع هو الفرق ما بين متوسط معدل الولادة و متوسط معدل الوفيات . إذا كان متوسط معدل الولادة هو $\beta > 0$. متوسط معدل الوفيات يتناسب مع حجم المجتمع . إذا فرضنا أن ثابت التناسب هو $\delta > 0$ ، كون المعادلة التفاضلية التي تحكم هذا النمو ؟

الحل :

ليكن حجم المجتمع p و معدل نمو المجتمع $\frac{dp}{dt}$ و معدلب النمو على الوحدة $\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$. الفرق بين متوسط معدل الولادة و متوسط معدل الوفيات كالآتي :

$$\beta - \delta p = \frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$$

$$\therefore \frac{dp}{dt} = p\left(\beta - \delta p\right)$$

مثال 2

لتكن كمية الجلكوز في دم المريض عند أي لحظة t هي $G\left(t\right)$. إذا تم حقن المريض بالجلكوز بمعدل ثابت k . في نفس الوقت يحترق الجلكوز في الجسم بمعدل يتناسب مع كمية الجلكوز الحالي . المعادلة المعبرة عن هذا النظام :

$$\frac{dG\left(t\right)}{dt} = k - aG\left(t\right)$$

مثال 3

نتيجة لقانون الثاني للحركة ، فإن القوة لجسم كتلته m يتحرك بعجلة a تعطى كالآتي

$$F = ma$$

فإذا سقط جسم كتلته m تحت تأثير الجاذبية فقط ، فإن قوة الوزن هي mg .
إذا كانت y هي ارتفاع الجسم فوق سطح الأرض ، فإن العجلة لأعلى ، هي

$$\frac{d^2y}{dt^2}$$

و تصبح معادلة الحركة : $m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg$

الفصل الأول:فصل المتغيرات

الطريقة المباشرة

عادةً تكتب معادلة الرتبة الأولى في شكلها العام على النحو التالي

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (1)$$

ونستخدم الطريقة المباشرة لفصل المتغيرات إذا أمكن تحليل الدالة إلى :

$$f(x,y)=\frac{g(x)}{h(y)} \qquad (2)$$

وعليه يمكن صياغة معادلة (1) على النحو التالي:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\frac{g(x)}{h(y)} \qquad (3)$$

$$h(y)dy=g(x)dx$$

$$\int h(y)dy=\int g(x)dx+c \qquad (4)$$

مثال 4

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+xy}{1+y}$$

الحل نختصر يمين المعادلة ، ينتج

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+xy}{1+y}=\frac{x\left(1+y\right)}{1+y}$$
$$\frac{dy}{dx}=x$$

$$dy=xdx$$
$$\int dy=\int xdx$$
$$y=\frac{1}{2}x^{2}+c$$

<u>مثال 5</u>

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}=2xy$$

الحل

$$\frac{dy}{dx}=2xy$$
$$\frac{dy}{y}=2xdx$$
$$\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx$$
$$\ln y=x^{2}+c$$
$$y=e^{x^{2}+c}=e^{x^{2}}e^{c}$$
$$y=Ce^{x^{2}}$$

لاحظ أن المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولي يحتوى حلها العام على ثابت اختياري واحد في حين يحتوى الحل العام لمعادلة المرتبة الثانية على ثابتين اختيارين وهكذا .

<u>مثال 6</u>

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\beta - \delta p = \frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$$
$$\delta . \quad \beta : \quad cons.$$

الحل : نفصل المتغيرات مباشرة :

$$\beta - \delta p = \frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$$
$$\therefore \frac{dp}{dt} = p\left(\beta - \delta p\right)$$
$$\frac{dp}{\left(\beta - \delta p\right)} = dt$$

نستخدم الكسور الجزئية :

$$\frac{1}{p\left(\beta - \delta p\right)} = \frac{1}{\beta p} + \frac{\delta}{\beta\left(\beta - \delta p\right)}$$
$$\frac{1}{\beta}\int \frac{dp}{p} + \frac{\delta}{\beta}\int \frac{dp}{\left(\beta - \delta p\right)} = \int dt$$
$$\frac{1}{\beta}\ln p - \frac{1}{\beta}\ln\left(\beta - \delta p\right) = dt + c$$
$$\frac{1}{\beta}\ln \frac{p}{\left(\beta - \delta p\right)} = t + c$$

$$\frac{P(t)}{\beta-\delta P(t)}=ce^{-\beta t}$$

$$t=0 \Rightarrow c=\frac{P(0)}{\beta-\delta P(0)}$$

$$\frac{P(t)}{\beta-\delta P(t)}=e^{-\beta t}\ \frac{P(0)}{\beta-\delta P(0)}$$

$$P(t)=\frac{\beta}{\delta+\left(\beta P^{-1}(0)-\delta\right)e^{\beta t}}$$

<u>مثال 7</u>

أوجد حل المعادلة التفاضلية $\frac{dG}{dt}=K-aG$

الحل : بفصل المتغيرات

$$\frac{dG}{dt}=K-aG$$
$$\frac{dG}{K-aG}=dt$$
$$\int\frac{dG}{K-aG}=\int dt$$
$$\frac{-1}{a}\ln(K-aG)=t+c$$

$$K - aG = e^{-at-ac} = Be^{-at}$$

$$G(t) = \frac{K}{a} - \frac{B}{a} e^{-at}$$

$$G(t) = \frac{K}{a} + Ce^{-at}$$

<u>مثال 8</u>

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + x^2 y^2}$$

$$xdy + x^2 y^2 dy = ydx$$

$$xdy - ydx + x^2 y^2 dy = 0$$

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} + y^2 dy$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + d\left(\frac{y^3}{3}\right) = 0$$

$$\frac{y}{x} + \frac{y^3}{3} = c$$

تمارين

أوجد حلول المعادلات التفاضلية :-

$$1)\ \frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$

$$2)\ \frac{dx}{dy} = x\ \cos y$$

$$3)\ \frac{dx}{dt} = e^{x}\ \cos t$$

$$4)\ \frac{dy}{dx} = (y-1)(y+1)$$

$$5)\ \frac{dz}{dr} = r^{2}\left(1+z^{2}\right)$$

$$6)\ \tan x\ \sin^{2} y dx + \cos^{2} x\ \cot y dy = 0$$

$$7)\ \sin x\ \cos y dx + \cos x\ \sin y dy = 0,\ y(0) = 0$$

$$8)\ \frac{dx}{dt} = x\left(1+\sin 2t\right),\ x(0) = 1$$

$$9)\ e^{x}\left(\frac{dx}{dt}+1\right) = 1,\ x(0) = 0$$

طريقة التعويض

أولاً :- (1) : لنفرض أن المعادلة التفاضلية معطاة على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (5)$$

$$put \quad z = \frac{y}{x}$$

$$\therefore y = xz$$

$$\frac{dy}{dx} = z + x\,\frac{dz}{dx}$$

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = F(z) = z + x\,\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{F(z) - z} = \frac{dx}{x} \qquad (6)$$

<u>مثال 9</u>

أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y} = \frac{1 - y/x}{1 + y/x}$$

$$= \frac{1 - z}{1 + z} = F(z)$$

$$\frac{dz}{F(z)-z}=\frac{dx}{x}$$

$$\frac{dz}{\frac{1-z}{1+z}-z}=\frac{dx}{x}$$

$$\frac{(1+z)dz}{1-2z-z^{2}}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{(1+z)dz}{1-2z-z^{2}}=\int\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(1-2z-z^{2}\right)=\ln x+\ln c=\ln cx$$

$$1-2z-z^{2}=cx^{-2}$$

$$\because z=\frac{y}{x}$$

$$x^{2}-2xy-y^{2}=c$$

(2) : لنفرض أن المعادلة التفاضلية معطاة على الصورة

$$\frac{dy}{dx}=F(ax+by+c) \qquad (7)$$

$$put \quad z=ax+by+c$$

$$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}=a+bF(z)$$

$$\frac{dz}{a+bF(z)}=dx \qquad (8)$$

مثال(10) :

حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}=(x+y+1)^2-1$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=(x+y+1)^2-1$$
$$=z^2-1=F(z)$$
$$\frac{dz}{a+bF(z)}=dx$$
$$\frac{dz}{1+z^2-1}=dx$$
$$z^{-2}dz=dx$$
$$\int z^{-2}dz=\int dx$$
$$-z^{-1}=x+c$$
$$(x+y+1)^{-1}=-(x+c)$$

مثال (11)

$$2\frac{dy}{dx}=\left(x+2y\right)^2+3$$

$$z=x+2y$$

$$2\frac{dy}{dx}=z^2+3=F\left(z\right)$$

$$\frac{dz}{dx}=1+2\frac{dy}{dx}=z^2+4$$

$$\frac{dz}{z^2+4}=dx$$

$$\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)=x+c$$

$$\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+2y}{2}\right)=x+c$$

ثانيا: (1): لنفرض أن المعادلة التفاضلية معطاة على الصورة

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right),a\beta\neq\alpha b \qquad (9)$$

$$if \quad c=\gamma=0$$

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{a+b\,y/x}{\alpha+\beta\,y/x}\right)$$

$$=F\left(\frac{a+b\,y/x}{\alpha+\beta\,y/x}\right)=F\left(\frac{a+bz}{\alpha+\beta z}\right)=F\left(z\right)$$

$$\frac{dz}{F\left(z\right)-z}=\frac{dx}{x}$$

$if \quad c \neq 0, or \quad \gamma \neq 0$

put

x = u + h …(i)

y = v + k …(ii)

بحيث يكون يمين المعادلة (9) يساوي

$$F\left(\frac{au+bv}{\alpha u+\beta v}\right)$$

و هذا يتم التوصل إليه بعد حل المعادلتين التاليتين آنيا

ah + bk = -c

$\alpha h + \beta k = -\gamma$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(v+k\right)}{du}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}.1$$

ثم تصبح معادلة (9)

$$\frac{dv}{du} = F\left(\frac{au+bv}{\alpha u+\beta v}\right) = F\left(\frac{a+bv/u}{\alpha+\beta v/u}\right)$$

وتحل وفقا للصيغة (9)

مثال(12)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y-5}{x+y-1}$$
$$a\beta=1\neq-1=\alpha b$$

الحل

$$h-k=5$$
$$h+k=1$$
$$h=3,\quad k=-2.$$
$$y=v+k=v-2$$
$$x=u+h=u+3$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{u-v}{u+v}$$

وحلها كما في مثال (9) : $u^2-2uv-v^2=c$

ثانيا: (2) :

$$a\beta=\alpha b$$
$$put$$
$$z=ax+by\ :a\frac{\beta}{b}=\alpha$$
$$\frac{\beta}{b}z=a\frac{\beta}{b}x+b\frac{\beta}{b}y=\alpha x+\beta y$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = a + b\,\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = a + bF\left(\frac{z + c}{\frac{\beta}{b} z + \gamma}\right)$$

<u>مثال (13)</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{2x + 2y - 2}$$

$$a\beta = 2 = \alpha b$$

<u>الحل</u>

$$z = x + y$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{z + 1}{2z - 1} = \frac{3z}{2z - 1}$$

$$3dx = \left(2 - \frac{1}{z}\right)dz$$

$$3\int dx = \int\left(2 - \frac{1}{z}\right)dz$$

$$3x + c = 2z - \ln z$$

$$x + y = Ce^{2y - x}$$

تمارين

أوجد حلول المعادلات التفاضلية الآتية

1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + y}{4x-2y+3}$$

2) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+3y-1}{4x+6y-5}$$

3) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+2y-3}{x+y}$$

4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{-x+y-1}{x+y}$$

5) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1-xy^2}{2x^2y}$$

6) $$\frac{dx}{dy} = \frac{x - x^2t}{t + xt^2}$$

الفصل الثاني المعادلات الخطية من الرتبة الأولى

المعادلة الخطية من الرتبة الثانية

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=f(x)$$

المعادلة الخطية من الرتبة الأولى

$$\frac{dy}{dx}+a(x)y=f(x) \qquad (1)$$

$$(i)\, if \;\; a(x)=a, \quad f(x)=0$$

$$\frac{dy}{dx}+ay=0 \qquad (3)$$

$$\frac{dy}{y}=-adx$$

$$\int\frac{dy}{y}=-a\int dx$$

$$\ln y=-ax$$

$$y=Ce^{-ax}$$

$$(ii)\, if \quad a(x)=a, \quad f(x)\neq 0$$

$$\frac{dy}{dx}+ay=f(x) \qquad (3)$$

نضرب طرفي المعادلة بالمعامل التكاملي

$$e^{ax}\frac{dy}{dx}+ay=e^{ax}f(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(e^{ax}y\right)=e^{ax}f(x)$$
$$\int d\left(e^{ax}y\right)=\int e^{ax}f(x)dx$$
$$e^{ax}y=\int e^{ax}f(x)dx+c$$

$$y=e^{-ax}\left(\int e^{ax}f(x)dx+c\right)$$
$$y=e^{-\int a(x)dx}\left(\int e^{\int a(x)dx}f(x)dx+c\right) \qquad (4)$$

$\mu=e^{\int adx}$ يسمى المعامل التكاملي

<u>مثال (14)</u>

$$\frac{dy}{dx}+2y=x$$
$$y=e^{-\int 2dx}\left(\int e^{\int 2dx}xdx+c\right)$$
$$y=e^{-2x}\left(\int e^{2x}xdx+c\right)$$
$$y=e^{-2x}\left(\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+c\right)$$

مثال (15)

$$\frac{dx}{dy} - x\ln y = y^{y}e^{-x}$$

الحل

$$x = e^{\int \ln y dy}\left[\int e^{-\int \ln y dy} y^{y} dy + c\right]$$

$$x = e^{y\ln y - y}\left[\int e^{-y\ln y + y} y^{y} dy + c\right]$$

$$x = y^{y}e^{-y}\left(\int y^{-y}e^{y} y^{y} dy + c\right)$$

$$x = y^{y}e^{-y}\left(y^{y} + c\right)$$

مثال (16)

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$y = e^{-\int dx}\left(\int e^{\int dx}\frac{1}{1+e^{2x}} dx + c\right)$$

$$y = e^{-x}\left(\int e^{x}\frac{1}{1+e^{2x}} dx + c\right)$$

$$y = e^{-x}\left(\tan^{-1}e^{x} + c\right)$$

معادلة برنوللى التفاضلية اللاخطية

$$\frac{dy}{dx}+a(x)y=f(x)y^{n} \qquad (5)$$

$$z=y^{1-n}$$

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}+a(x)(1-n)y^{-n}y=(1-n)y^{-n}f(x)y^{n}$$

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)a(x)z=(1-n)f(x) \qquad (6)$$

و هي معادلة خطية من الرتبة الأولى

مثال

$$y-x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}y^{2}e^{y}$$

الحل

$$y\frac{dx}{dy}-x=y^{2}e^{y}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=ye^{y}$$

$$\therefore x = e^{-\int -\frac{dy}{y}} \left(\int e^{\int -\frac{dy}{y}} y e^{y} dy + c \right)$$

$$\therefore x = y \left(\int \frac{1}{y} y e^{y} dy + c \right)$$

$$\therefore x = y \left(e^{y} + c \right)$$

<u>مثال (17)</u>

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} y = -\frac{5}{2} x^{2} y^{3}$$

الحل

$$n = 3$$

$$z = y^{1-n} = y^{1-3} = y^{-2}$$

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$$

بضرب المعادلة في

$$(1-n) y^{-n} = -2y^{-3}$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x} z = 5x^{2}$$

$$z = e^{-2\int \frac{dx}{x}} \left(\int e^{2\int \frac{dx}{x}} .5x^{2} dx + c \right)$$

$$z = x^{-2}\left(\int 5x^{4}dx + c\right)$$

$$z = y^{-2} = x^{-2}\left(x^{5} + c\right)$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^{5} + c}}$$

<u>مثال (18)</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 y}{2\tan x \sin y \cos y}, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

الحل : ضع

$$T = \cos^2 y$$

$$\frac{dT}{dx} = -2\cos y \sin y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dT}{dx} \Big/ \left(-2\cos y \sin y\right)$$

$$\frac{dT}{dx} \Big/ \left(-2\cos y \sin y\right) = \frac{\sin^2 x + T}{2\tan x \sin y \cos y}$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\sin^2 x + T}{\tan x}$$

$$\frac{dT}{dx} + \cot x T = -\sin x \cos x$$

$$T = e^{-\int \frac{\cos x}{\sin x} dx} \left[\int e^{\int \frac{\cos x}{\sin x} dx} \left(-\sin x \cos x \right) dx + c \right]$$

$$T = e^{-\ln \sin x} \left[\int e^{\ln \sin x} \left(-\sin x \cos x \right) dx + c \right]$$

$$T = \cos ecx \left(-\int \sin^2 x \cos x dx + c \right)$$

$$T = \cos^2 y = \cos ecx \left(-\frac{\sin^3 x}{3} + c \right)$$

$$y = \cos^{-1} \sqrt{\frac{c}{\sin x} - \frac{\sin^2 x}{3}}$$

$$y \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$0 = \cos^{-1} \sqrt{c - \frac{1}{3}}$$

$$\cos 0 = 1 = \sqrt{c - \frac{1}{3}}$$

$$c = \frac{4}{3}$$

تمارين

أوجد حلول المعادلات التفاضلية الآتية

$$1)\ \frac{dx}{dt}+x\cot t=2t\operatorname{cosec} t$$

$$2)\ \frac{dx}{dt}-2x=t^{2}e^{2t}$$

$$3)\ \frac{dx}{dt}+x=te^{-t}+1$$

$$4)\ y`+\frac{2}{x}y=\frac{\cos x}{x^{2}},\ y(\pi)=0$$

$$5)\ y`-y=-y^{3}xe^{-2x}$$

$$6)\ tx^{2}\frac{dx}{dt}+x^{3}=t\cos t$$

الفصل الثالث المعادلة التفاضلية التامة

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (7)$$

تكون المعادلة التفاضلية السابقة تامة إذا تحقق الشرط

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

ومن ثم يمكن مقارنتها بالتفاضل التام

$$du\left(x,y\right)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

يصبح هو الحل ، على النحو التالي

$$u\left(x,y\right)=c$$

$$u\left(x,y\right)=\frac{\partial u}{\partial x}dx=\int Pdx+\phi\left(y\right)$$

$$u\left(x,y\right)=\frac{\partial u}{\partial y}dy=\int Qdy+\phi\left(x\right)$$

<u>مثال (19)</u>

$$\left(2x+y\right)dx+\left(2y+x\right)dy=0$$

الحل

$$u(x,y)=\int Pdx+\phi(y)$$
$$=\int(2x+y)dx+$$
$$=x^2+xy+\phi(y)$$
$$u(x,y)=\int Qdy+\phi(x)$$
$$=\int(x+2y)dy+\phi(x)$$
$$=xy+y^2+\phi(x)$$
$$u(x,y)=x^2+xy+y^2+c$$

أما إذا كانت المعادلة التفاضلية (7) ليست بتفاضل تام فإنه توجد دالة $\mu(x,y)$ تسمى المعامل التكاملي بحيث أن

$$du=\mu(Pdx+Qdy)=(\mu Pdx+\mu Qdy)=0$$

تصبح معادلة تفاضلية تامة، أى أن

$$\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x}$$

وهناك حالتان

$$(i) \qquad \mu = \mu(x)$$

$$\frac{\mu \partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x}$$

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} = \mu \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx$$

$$(ii) \qquad \mu = \mu(y)$$

$$\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \mu \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = -\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dy$$

مثال (20)

$$\left(x + y^{2}\right)dx - 2xydy = 0$$

الحل

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq -2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx$$

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = -\frac{2}{x}dx$$

$$\ln \mu = \ln x^{-2}$$

$$\mu = x^{-2}$$

بضرب المعادلة في المعامل التكاملي :

$$x^{-2}\left(x + y^{2}\right)dx - x^{-2}2xydy = 0$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^{2}}{x^{-2}}\right)dx - 2\frac{y}{x}dy$$

$$\frac{\partial \mu P}{\partial y} = 2\frac{y}{x^{2}} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x}$$

$$u(x,y)=\int P\mu dx+\phi(y)$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{y^{2}}{x^{2}}\right)dx+\phi(y)$$

$$=\ln x-\frac{y^{2}}{x}+\phi(y)$$

$$u(x,y)=\int Q\mu dy+\phi(x)$$

$$=-2\int\frac{y}{x}dy$$

$$=-\frac{y^{2}}{x}+\phi(x)$$

$$u(x,y)=\ln x-\frac{y^{2}}{x}+c$$

مثال (21)

$$\frac{y}{x}dx+\left(y^{3}-\ln x\right)dy=0$$

الحل

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x^{-1}\neq -x^{-1}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\mu}{\mu}=-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dy$$

$$\frac{\partial\mu}{\mu} = -\frac{2}{y}dy$$

$$\ln\mu = \ln y^{-2}$$

$$\mu = y^{-2}$$

$$\int \mu P dx = \frac{1}{y}\int\frac{dx}{x} = \frac{\ln x}{y} + \phi(y)$$

$$\int \mu Q dy = \int\left(y - \frac{\ln x}{y^2}\right)dy = \frac{y^2}{2} + \frac{\ln x}{y} + \phi(x)$$

$$u(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{\ln x}{y} + c$$

تمارين

1) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$
2) $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0$
3) $(x+y)dx + (x + 2y)dy = 0$
4) $2xdx/y^3 + \frac{1}{y^6}(y^3 - 3x^2)dy = 0$
5) $\left(\frac{\ln\ln y}{x} + \frac{2}{3}xy^3\right)dx + \left(\frac{\ln x}{y\ln y} + x^2y^2\right)dy = 0$
6) $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0$
7) $(2y + x^2)dx - xdy = 0$
8) $(2xy + x^2y + y^3\backslash 3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$
9) $(x^2 + y^2 + 1)dx - (xy + y)dy = 0$

الباب الثاني

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة ا لثانية

المعادلة التفاضلية العامة من الرتبة الثانية ، كالآتي

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=f(x) \qquad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=0 \qquad (2)$$

تسمى المعادلة (2) متجانسة إذا كان $f(x) = 0$

المجموع الخطي للحلين y_2 , y_1 هو :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

c_1 ,c_2 ثابتنان.

الاستقلال الخطي :

الدالتان y_2 , y_1 يقال أنهما دالتان مستقلتان خطيا كلما كانت الدالتان

$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$ يقتضي $0 = c_1 = c_2$

عدم الإستقلال الخطي :

y_2 , y_1 يقال أنهما دالتان غير مستقلتين خطيا كلما كانت

$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$ يقتضي $c_1 = 0$ أو $c_2 = 0$

بعبارة أخرى يقال أن دالتين غير مستقلتين خطيا إذا كانت إحداهما مضاعف ثابت للأخرى .

نظرية (1)

إذا كان y_2 , y_1 هما حلان للمعادلة التفاضلية

$$y'' + ay' + by = 0$$

أي مجموع خطي لهما هو أيضا حل للمعادلة .

البرهان:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y'' + ay' + by = \left(c_1 y_1'' + c_2 y_2''\right)$$
$$+ a\left(c_1 y_1' + c_2 y_2'\right) + b\left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right)$$
$$= c_1\left(y_1'' + ay_1' + by_1\right) + c_2\left(y_2'' + ay_2' + by_2\right) = 0$$

شرط الاستقلال الخطي :

y_2 , y_1 حلان مستقلان خطيا فقط إذا كان المحدد

$$W\left(y_1, y_2\right) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \neq 0$$

مثال (1) برهن أن

$y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$

هما حلان للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$

الحل

$$W\left(\cos x,\sin x\right)=\det\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & cosx\end{pmatrix}=1\neq 0$$

استخدام حل معلوم لإيجاد الحل الآخر [1]$_4$

المعادلة التفاضلية المتجانسة

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\left(x\right)\frac{dy}{dx}+b\left(x\right)y=0$$

لها حل عام

$y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$

$y_1 \neq 0$ حل معلوم . المطلوب إيجاد الحل الآخر المستقل خطيا

$y_2 / y_1 = v(x)$

$y_2 = v\, y_1$

$y`_2 = v\, y`_1 + v`\, y_1$

$y``_2 = v\, y``_1 + v`\, y`_1 + v`\, y`_1 + v``\, y_1$

ومن ثم y_2 حل يحقق المعادلة التفاضلية

$y``_2 + a\, y`_2 + b\, y_2 = (v\, y_1)`` + a(v\, y_1)` + b(v\, y_1) =$

$(v\, y``_1 + 2v`\, y`_1 + v``\, y_1) + a(v\, y`_1 + v`\, y_1) + b\, v\, y_1$

$= v(y_1`` + ay_1` + by_1) + v`(2y_1` + a\, y_1) + v``y_1$

$= 0 + v`(2y_1` + a\, y_1) + v``y_1 = 0$

$v``/v` = -\ (2y_1` + a\, y_1)/\, y_1 = -2\, y`_1/\, y_1 - a$

lnv` = -2 ln y_1 - ∫ a(x)dx

$$v' = \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^2}$$

$$v = \int \frac{e^{-\int a(x)dx}dx}{y_1^2}$$

$$y_2 = y_1 v = y_1 \int \frac{e^{-\int a(x)dx}dx}{y_1^2}$$

مثال (2)

أوجد الحل الآخر إذا كان

x^2 y``– xy` + y = 0 , y_1 = x

الحل :

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y + 0$$

$$y_2 = x\int \frac{e^{-\int -\frac{1}{x}dx}dx}{x^2} = x\int \frac{e^{\ln x}dx}{x^2}$$

$$= x\int \frac{xdx}{x^2} = x\int \frac{dx}{x} = x\ln x$$

$$y = c_1 x + c_2 x \ln x$$

تمارين

أوجد الحل الآخر

1) $y^{``}-2y^{`}+y=0\ ,\quad y=e^{x}$
2) $y^{``}-2x\,y^{`}+2y=0\quad ,y=x,\ x>0$
3) $y^{``}+3y^{`}/x=0,\quad y=1$
4) $x^2y^{``}+xy^{`}+4y=0,y=x^2$

(2):المعادلة المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

$$y^{``}+ay^{`}\ by=0\ \ldots(1)$$

سنفرض أن الحل على الصورة

$$y=e^{\lambda x}$$
$$y^{`}=\lambda e^{\lambda x}$$
$$y^{``}=\lambda^2 e^{\lambda x}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) ، ينتج

$$\lambda^2 e^{\lambda x}+a\lambda e^{\lambda x}+b\,e^{\lambda x}=0$$

وتسمى المعادلة المساعدة . لكي يتحقق الحل يجب أن

$$\lambda^2+a\lambda+b=0\ \ldots(2)$$

$$\lambda_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$
$$\lambda_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

هنالك ثلاث حالات وفق اختلاف المميز

<u>الحالة الأولى جذران حقيقيان مختلفان</u> $\lambda_1 , \quad \lambda_2$

$$W\left(y_1, y_2\right) = \det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} = \left(\lambda_2 - \lambda_1\right) e^{\left(\lambda_2 + \lambda_1\right)x} \neq 0$$

إذا الحلان مستقلان خطيا و يصبح الحل العام في هذه الحالة ، هو

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

<u>مثال (3)</u>

$y`` + 3y` - 10y = 0$

الحل:- المعادلة المساعدة

$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda - 2)(\lambda + 5) = 0 , \lambda=2 , \lambda=-5$

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x}$

<u>الحالة الثانية هنالك جذر مكرر</u> : $\lambda_2 = \lambda_1 = -a/2$

ويصبح الحلان هما

$$y_1 = e^{\lambda} = e^{-\frac{a}{2}x}$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a(x)dx} dx}{y_1^2}$$

$$y_2 = e^{-\frac{a}{2}x} \int \frac{e^{-\int adx} dx}{e^{-ax}}$$

$$y_2 = e^{-\frac{a}{2}x} \int \frac{e^{-ax} dx}{e^{-ax}} = xe^{-\frac{a}{2}x}$$

$$y = c_1 e^{-\frac{a}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{a}{2}x}$$

$$y = c_1 e^{\lambda} + c_2 x e^{\lambda}$$

مثال (4)

$y`` - 6y + 9 = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$(\lambda - 3)^2 = 0$, $\lambda = 3$

$y = c_1 e^{3x} + c_2 xe^{3x}$

تمارين

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية

1) $y`` - 4y = 0$

2) $x` + x` - 3x = 0$

3) $y`` - 3y` + 2y = 0$

4) $y`` + 5y` + 6y = 0$

5) $y`` + 2\pi y` + \pi^2 y = 0$

6) $y`` - 13y` + 42y = 0$

7) $y`` + 2y` + y = 0$

8) $y`` + 4y` + 4y = 0$

9) $y``` - 9y` = 0$

10) $y``` - 6y`` + 3y` + 10y = 0$

<u>الحالة الثالثة هنالك جذران تخيليان مترافقان</u>

$$\lambda_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} = \alpha + i\,\beta$$

$$\lambda_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2} = \alpha - i\,\beta$$

سنستخدم صيغة أويلر

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$y_1 = e^{\lambda_1} = e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha} e^{i\beta}$$

$$y_1 = e^{\alpha}\left(\cos\beta + i\,\sin\beta\right)$$

$$y_2 = e^{\lambda_2} = e^{\alpha - i\beta} = e^{\alpha} e^{-i\beta}$$

$$y_2 = e^{\alpha}\left(\cos\beta - i\,\sin\beta\right)$$

$$Y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha} \cos\beta$$

$$Y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha} \sin\beta$$

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$$

$$Y = e^{\alpha}\left(c_1 \sin\beta + c_2 \cos\beta\right)$$

مثال (5)

$y`` + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = 0 \pm i$

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

تمارين

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية

1) $y'' + 2y' + 2y = 0$
2) $x'' + x' + 7x = 0$
3) $8y'' + 4y' + y = 0 , y(0)=0 , y'(0)=1$
4) $y'' + y' + 2y = 0$
5) $y'' + y' + y = 0 , y(0)=1 , y'(0)=3$
6) $y''' - y'' + y' - y = 0$

(3) :المعادلة اللامتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad \dots (1)$$

نوجد حل المعادلة المتجانسة ثم نوجد الحل الجزئي .

الحالة الأولى :

الحل الجزئي لا يوجد منه حد هو حل للمعادلة المتجانسة : y_p

$$y'' + ay' + by = 0$$

يكون الحل المقترح وفقا لشكل الدالة ، كالآتي

1) $f(x)=P_n(x)$: $y_p = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a)$
2) $f(x)=P_n(x)e^{ax}$: $y_p = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a)e^{ax}$
3) $f(x)=P_n(x)e^{ax} \sin bx$ or $f(x)=P_n(x)e^{ax} \cos bx$

$y_p = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)e^{ax} \sin bx$

$$+ (d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0)e^{ax}\cos bx$$

مثال (6)

أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' - y = x^2$$

الحل المقترح هو كثيرة حدود من الدرجة الثانية

$$y_p = c x^2 + b x + a$$

$$y'_p = 2cx + b$$

$$y''_p = 2c$$

$$2c - (cx^2 + bx + a) = x^2$$

وبمقارنة المعاملات بين الطرفين ينتج :

$$a = -2 \quad , \quad b = 0 \quad , \quad c = -1$$

ويصبح الحل الجزئي هو

$$y_p = -x^2 - 2$$

في حين أن حل المعادلة المتجانسة

$$y'' - y = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

$y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-x} – (x^2 + 2)$

<u>مثال (7)</u>

أوجد الحل العام للمعادلة

$y`` + 4y = 3 \sin x$

الحل: نوجد أولا حل المعادلة المتجانسة

$y`` + 4y = 0$

$\lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda = \pm 2i$

$y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

الحل الجزئي المقترح هو

$y_p = a \sin x + d \cos x$

$y`_p = a \cos x – d \sin x$

$y``_p = -a \sin x – d \cos x$

$y`` + 4y = -a \sin x – d \cos x + 4a \sin x + 4d \cos x = 3 \sin x$

$3a \sin x + 3d \cos x = 3 \sin x$

$a = 1 , d = 0$

$y_p = \sin x$

$y = y_c + y_p = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \sin x$

<u>مثال (8)</u>

أوجد الحل العام للمعادلة

$y'' - 3y' + 2y = e^x \sin x$

الحل: نوجد أولا حل المعادلة المتجانسة

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

$y_p = a e^x \sin x + d e^x \cos x$

$y'_p = (a-d) e^x \sin x + (a+d) e^x \cos x$

$y''_p = 2a e^x \cos x - 2d e^x \sin x$

$e^x (2a \cos x - 2d \sin x) - 3e^x [(a-d) \sin x + (a+d) \cos x]$

$+ 2e^x (a \sin x + d \cos x) = e^x \sin x$

وبمقارنة معاملات الجيب والجتا بين الطرفين بعد القسمة على e^x

$2a - 3(a+d) + 2d = 0, \quad a = -1/2$

$-2d - 3(a-d) + 2a = 1, \quad d = 1/2$

$y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x (\cos x - \sin x)/2$

الحالة الثانية

إذا كان أي حد من الحل الجزئي في نفس الوقت هو حد في حل المعادلة المتجانسة يصبح الحل الجزئي هو $x^k y$ بحيث أن k أصغر عدد صحيح بحيث لا يصبح أي حد فيه مكرر في حل المعادلة المتجانسة.

مثال(9)

$y'' - y' - 6y = 20e^{-2x}$

$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 =(\lambda - 3)(\lambda + 2)$

$\lambda =3, \lambda =-2$

$y_c = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$

$y_p =ae^{-2x}$ حل مكرر في حل المتجانسة و يصبح الحل الجزئي الجديد

$y_p = axe^{-2x}$

$y'_p = a(1-2x)e^{-2x}$

$y''_p = -2ae^{-2x} - 2a(1-2x) e^{-2x}$

$y'' - y' - 6y = [-2ae^{-2x} - 2a(1-2x) e^{-2x}] - a(1-2x)e^{-2x} - 6xe^{-2x}$

$= 20 e^{-2x} , a = - 4$

$y_p = -4xe^{-2x}$

$y = y_c + y_p = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - 4xe^{-2x}$

<u>مثال (10)</u>

$y`` - 4 y` + 4y = 6xe^{2x}$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0 \quad , \quad \lambda = 2$

$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 xe^{2x}$

$y_p = x^2 (ax+b) e^{2x}$

$y`_p = (3ax^2 + 2bx) e^{2x} + (2ax^3 + 2bx^2) e^{2x}$

$y``_p=[(6ax+2b)+(6ax^2+4bx)+(6ax^2+4bx)+(4ax^3+4bx^2)]e^{2x}$

بمقارنة معاملات :

$x^3 : \ 4a - 8a + 4a = 0$

$x \ : \ 6a+4b+4b-8b=6 , \quad a=1$

بمقارنة الحد المطلق $b=0$

$y = y_c + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 xe^{2x} + x^3 e^{2x}$

تمارين

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية

1) $y``+y=x^2$

2) $y``+y=1+x+x^2$

3) $y``+y=xe^x$

4) $y`` +4y=16x \sin 2x$

5) $y``-y`-2y=x^2+\cos x$

6) $y`` - 4y` +5y = 20 \cosh 2x.\cos x$

ans: $e^{2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) +5xe^x \sin x +$

$0.5 e^{-2x} \cos x – 0.25e^{-2x}\sin x$

(4):معادلة كوشي- يلر المتجانسة : $[2]_2$

$x^2y`` +axy` +by = 0 \ldots (1)$

وسنفرض أن حلها هو

$y= x^r , y` = rx^{r-1} , y`` = r(r-1)x^{r-2}$
نعوض عن هذه القيم في معادلة (1) نحصل على

$r(r-1)x^r + arx^r +bx^r = 0$

$r^2 + (a-1)r + b = 0\ldots(2)$

وهنالك ثلاث حالات :

(i) $r_1 \neq r_2$

جذرا المعادلة المساعدة (2) حقيقيان مختلفان ويصبح الحل العام

$$y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$$

مثال(11)

$x^2 y'' - 2xy - 4y = 0$

$r^2 - 3r - 4 = 0$, $r=-1$, $r=4$

$y = c_1 x^{-1} + c_2 x^4$

(ii) جذرا المعادلة المساعدة حقيقي مكرر و نفرض الحل الأول هو x^r:

ثم نوجد الحل الآخر

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a(x)dx} dx}{y_1^2}$$

$$y_2 = x^r \int \frac{e^{-\int \frac{a}{x} dx} dx}{x^{2r}}$$

$$y_2 = x^r \int \frac{x^{-a} dx}{x^{2r}}$$

$$= x^r \int x^{-a-2r} dx$$

$$= x^r \int x^{-a-(1-a)} dx$$

$$= x^r \ln x$$

ويصبح الحل العام

$y = c_1 x^r + c_2 x^r \ln x$

مثال (12)

$4x^2y'' + 8xy' + y = 0$

$4r^2 + 4r + 1 = 0$

$(2r-1)^2 = 0$, $r=-1/2$

$y = c_1x^{-1/2} + c_2x^{-1/2} \ln x$

(ii) جذرا المعادلة المساعدة تخيليان

$r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$

$$y_1 = x^{r_1} = x^{\alpha+i\beta} = x^{\alpha}x^{i\beta}$$
$$y_1 = x^{\alpha}e^{i\beta\ln x} = x^{\alpha}\left(\cos\beta\ln x + i\sin\beta\ln x\right)$$
$$y_2 = x^{r_2} = x^{\alpha-i\beta} = x^{\alpha}x^{-i\beta}$$
$$y_2 = x^{\alpha}e^{-i\beta\ln x} = x^{\alpha}\left(\cos\beta\ln x - i\sin\beta\ln x\right)$$

$$Y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha}\cos\beta\ln x$$
$$Y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha}\sin\beta\ln x$$
$$Y = c_1Y_1 + c_2Y_2$$
$$Y = e^{\alpha}\left(c_1\sin\beta\ln x + c_2\cos\beta\ln x\right)$$

مثال(13)

$x^2y'' + 3xy' + 3y = 0$

$r^2 + 2r + 3 = 0$

$r = -1 \pm \sqrt{2}$

$y = x^{-1}(c_1 \cos\sqrt{2}\ln x + c_2 \sin\sqrt{2}\ln x)$

<u>مثال(14)</u>

$x^3y''' + 5x^2y'' + 7xy' + 8y = 0$

$r^3 + 2r + 4r + 8 = 0 = (r+2)(r^2 + 4) = 0$

$r = -2 \;,\; r \pm 2i$

$y = x^0(c_1 \cos 2\ln x + c_2 \sin 2\ln x) + cx^{-2}$

<u>ملاحظة</u>

معادلة كوشي- يلر يمكن اختزالها إلى معادلة ذات معاملات ثابتة باستخدام التعويض :

$$x = e^t$$
$$t = \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \ldots(1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \ldots (2)$$

بتعويض (1) و (2) في معادلة كوشي- يلر

$x^2y'' + axy' + by = f(x)$

$y'' + (a-1)\, y' + by = f(e^t)$

<u>مثال(15)</u>

$x^2y'' - xy' + y = \ln x$

$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = \ln e^t = t$

$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 = (\lambda - 1)^2 = 0$

$y_c = c_1e^t + c_2\, te^t$

$y_p = a + bt = 2 + t$

$y = y_c + y_p = c_1e^t + c_2\, te^t + 2 + t$

$$y = c_1 x + c_2\, x \ln x + 2 + \ln x$$

تمارين

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية

1) $x^2 y'' - 2y = 0$
2) $x^2 y'' + xy' = 0$
3) $x^2 y'' + 3xy' + 2y = 0$
4) $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$
5) $4x^2 y'' - 4xy' + 3y = 0$
6) $x^2 y'' + 5xy' + 5y = 0$
7) $x^2 y'' + xy' - y = 0$
8) $x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$
9) $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$
10) $x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

(5):طريقة تغيير الثوابت :-[3][2]

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad \dots (1)$$

وحل المعادلة المتجانسة

$$y'' + ay' + by = 0 \quad \dots\dots (2)$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \dots (3)$$

وعليه فإن أي حل جزئي للمعادلة (1) يجب أن يحقق أن :

y_p/y_1 y_p/y_2 , ليسا بثوابت و لإيجاد مثل هذا الحل سنقترح أن

$$y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 \ldots (4)$$

بحيث أن

$$c`_1(x)y_1 + c`_2(x)y_2 = 0 \ldots (5)$$

نفاضل معادلة (4) لنحصل على

$$y`_p = c_1(x)y`_1 + c_2(x)y`_2 + c`_1(x)y_1 + c`_2(x)y_2$$

$$= c_1(x)y`_1 + c_2(x)y`_2$$

$$y``_p = c_1(x)y``_1 + c_2(x)y``_2 + c`_1(x)y`_1 + c`_2(x)y`_2$$

$$(1) = c_1(x)[y``_1 + a\,y`_1 + b\,y_1] + c_2(x)[y``_2 + a\,y`_2 + y_2]$$
$$+ c`_1(x)y`_1 + c`_2(x)y`_2 = f(x).$$

$$c`_1(x)y`_1 + c`_2(x)y`_2 = f(x) \ldots (6)$$

أصبح لدينا المعادلتان (5) و(6) نحلهما آنيا بطريقة كرامر للمحددات لنوجد

$$c_1'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}} = \frac{-y_2 f(x)}{W}$$

$$c_1'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & f(x) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}} = \frac{y_1 f(x)}{W}$$

وأخيرا فإن

$$c_1(x) = \int c_1'(x)\,dx$$
$$c_2(x) = \int c_2'(x)\,dx$$

<u>مثال (16)</u>

y`` + y = tanx

$\lambda^2 + 1 = 0$; $\lambda = \pm I$

$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$y_1 = \cos x$ $\qquad$ $y_2 = \sin x$

$y`_1 = -\sin x$ $\qquad$ $y`_2 = \cos x$

$$w = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$
$$w = \det\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$
$$w = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$c_1'(x) = \frac{-y_2 f(x)}{w} = -\tan x \sin x = \frac{\cos^2 - 1}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

$$c_1(x) = \int(\cos x - \sec x)dx = \sin x - \ln(\sec x + \tan x)$$

$$c_2'(x) = \frac{-y_1 f(x)}{w} = \tan x \cos x = \sin x$$

$$c_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x$$

$y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 = \cos x \sin x - \cos x \ln(\sec x + \tan x)$

$- \cos x \sin x = - \cos x \ln(\sec x + \tan x)$

$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + - \cos x \ln(\sec x + \tan x)$

<u>مثال (17)</u>

$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x^4 e^x$

$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$

$r^2 - 4r + 3 = 0$

$r = 1, r = 3$

$y_c = c_1 x + c_2 x^3$

$y_1 = x, \qquad y_2 = x^3$

$$w = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^2 - x^3 = 2x^3$$

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 2x^2 e^x$$

$$c_1'(x) = \frac{-y_2 f(x)}{w} = -\frac{2x^2 e^x x^3}{2x^3} = -x^2 e^x$$

$$c_1(x) = \int -x^2 e^x dx = -e^x (x^2 - 2x + 2)$$

$$c_2'(x) = \frac{-y_1 f(x)}{w} = \frac{2x^2 e^x x}{2x^3} = e^x$$

$$c_2(x) = \int e^x dx = e^x$$

$y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 = 2e^x(x^2-x)$

$y = y_c + y_p = c_1x + c_2x^3 + 2e^x(x^2-x)$

<u>تمارين</u>

1) $x^2y`` + y` = x$
2) $x^2y`` - 2xy` + 2y = x^3 \ln x$
3) $x^2y`` + 7xy` + 5y = x$, $x=e^t$
4) $x^2y`` -2y = \ln x$
5) $4x^2y`` - 2y = \ln x$
6) $x^2y`` - 3xy` + 13y = 4+3x$
7) $x^2y`` + - 4xy` + 6y = 2 \ln x$
8) $x^3y``` -3 x^2y`` + 6xy – 6y = 3+\ln x^3$
9) $y`` + 4y = \sec 2x$

10) $y'' + y = \cot x$

11) $y'' + y' = \cosh x$

12) $y'' - y = \sin^2 x$

13) $y'' + 4y = \sec x \tan x$

14) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

-

(6) تخفيض الرتبة

إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية

$F(x,y,y',y'') = 0 \ldots (1)$

الحالة الأولى

Y غير موجودة صراحة في المعادلة (1)

$F(x,y',y'') = 0 \ldots (2)$

يمكن اختزالها إلى معادلة من الرتبة الأولى عن طريق التعويض

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$(2) = F(x,p,p')$

الحالة الثانية

X غير موجودة صراحة في المعادلة (1)

$F(y,y',y'') = 0 \ldots (3)$

يمكن اختزالها إلى معادلة من الرتبة الأولى عن طريق التعويض

$$\frac{dy}{dx} = p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$$

<u>مثال (18)</u>

$$y'' + \frac{1}{x}y' = 0$$

F(x,y`,y``) = 0 = F(x,p,p`)

$$\frac{dp}{dx} + \frac{1}{x}p = 0$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{-dx}{x}$$

$$p = \frac{dy}{dx} = c_1 - x$$

$$y = c_1 x - c_2\frac{x^2}{2}$$

<u>مثال (19)</u>

y`` - 2yy` = 0  = F(y,y`,y``)

$$y' = p\,, \quad y'' = p\,\frac{dp}{dy}$$

$$p\,\frac{dp}{dy} - 2py = 0$$

$$\frac{dp}{dy} = 2y$$

$$dp = 2y\,dy$$

$$p = y^2 + a^2$$

$$dx = \frac{dy}{y^2 + a^2}$$

$$\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{y}{a} = x + c$$

<u>مثال (20)</u>

$x^2 y`` + xy` = x$

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' = 1$$

$$p' + \frac{1}{x}\,p = 1$$

$$p = e^{-\int\frac{dx}{x}}\left(e^{\int\frac{dx}{x}}.1dx + c\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + c\right) = \left(\frac{x}{2} + \frac{c}{x}\right)$$

$$y = \frac{x^2}{4} + c\ln x + b$$

<u>مثال (21)</u>

$xy``` - 2y`` = 0$

$y``` - 2y``/x = 0$

$y`` = q \quad , \quad y``` = q`$

$q` - 2q/x = 0$

$dq/q = 2dx/x$

$\ln q = 2\ln ax = \ln(ax)^2$

$y`` = q = a^2x^2$

$y` = a^2x^3/3 + b$

$y = a^2x^4/12 + bx + c$

<u>تمارين</u>

حل المعادلات التالية عن طريق تخفيض الرتبة

1) $y`` + y = 0$
2) $y`` + yy` = 0$
3) $y`` + xy` = 0$

4) $xy`` + y` = 0$

5) $2y`` - (y`)^2 + 1 = 0$

الباب الثالث

الدوال الخاصة

الفصل الأول

حلول المعادلات التفاضلية بمتسلسلات القوى

تعريف (1)

إذا كانت

$$a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0 \quad ...(1)$$

حيث لا يوجد عامل مشترك بين كثيرات الحدود

$a_\circ, a_1, a_2$

$a_2(x_\circ) \neq 0$

$x = x_\circ$

تسمى نقطة عادية

نظرية (1)

$x = x_\circ$ نقطة عادية للمعادلة (1) بالإمكان إيجاد حلان مستقلان على هيئة متسلسلات قوى :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_\circ)^n$$

لتحري السهولة ضع $x_\circ = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

مثال(1)

$$y'' + xy' + y = 0 \quad \ldots (1)$$

$x_0 = 0$ نقطة عادية ونفرض أن

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

ونعوض بهذه القيم في المعادلة (1)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

ضع $k = n-2$ في الأولى و $k = n$ في الثانية والثالثة على التوالي

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1) c_{k+2} + (k+1) c_k\right] x^k = 0$$

$$c_2 = -\frac{c_\circ}{2}, c_3 = -\frac{c_1}{3}, c_4 = -\frac{c_2}{2} = \frac{c_\circ}{2.4},$$

$$c_5 = -\frac{c_3}{5} = \frac{c_1}{3.5}, c_6 = -\frac{c_4}{6} = -\frac{c_2}{2.4.6},$$

ويصبح الحل العام هو

$$y = c_\circ\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.4} - \frac{x^6}{2.4.6}\right) + c_1\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3.5} - \frac{x^7}{3.5.7}\right)$$

تمارين

1) هل $x = 0$ نقطة عادية للمعادلتين

(i) $xy'' + \sin x\, y = 0$, (ii) $(x^2+1)y''+xy'-y=0$

2) برهن أن $y = (1+x^2)^p, y(0)=1$ هو حل للمعادلة التفاضلية

$(1+x^2)y' = 2xpy$

3) أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية حول النقطة العادية $x=0$

1) $y'' + y = e^{2x}$
2) $y'' + 2y' + y = \sin x$
3) $y'' - xy' = 0$
4) $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$

مثال(2)

معادلة هيرمت التفاضلية

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad \dots (1)$$

واضح أن $x=0$ نقطة عادية

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2nc_n x^n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)c_{n+2} - (2n-\lambda)c_n\right]x^n = 0$$

$$c_{n+2} = \frac{(2n-\lambda)c_n}{(n+1)(n+2)} \dots (2)$$

$$c_2 = -\frac{\lambda}{2.1}c_\circ, \qquad c_3 = \frac{(2-\lambda)}{3.2}c_1,$$
$$c_4 = \frac{(4-\lambda)}{4.3}c_2 \qquad c_5 = \frac{(6-\lambda)}{5.4}c_3,$$
$$c_4 = \frac{(4-\lambda)(-\lambda)}{4!}c_\circ, \qquad c_5 = \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5.4}c_1$$

$$y = c_\circ\left(1+\frac{-\lambda}{2!}x^2+\frac{(4-\lambda)(-\lambda)}{4!}x^4+\dots\right)$$
$$+c_1\left(x+\frac{(2-\lambda)}{3!}x^3+\frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5.4}x^5+\dots\right)$$
$$\lambda = 2p$$
$$y = c_\circ\left(1+\sum_{n=1}2^n(-p)(-p+2)\dots(-p+2n+2)\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$$
$$+c_1\left(x+\sum_{n=1}2^n(1-p)(1-p+2)\dots(1-p+2n+2)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

<u>كثيرة حدود هيرمت</u>

وتصبح λ=2p حيث $c_p = 2^p$

لإيجاد كثيرة حدود هيرمت نختار

$$c_n = \frac{(n+1)(n+2)c_{n+2}}{(2n-2p)}$$

$$c_{p-2} = \frac{-p(p-1)c_p}{4} = \frac{-p(p-1)2^p}{2^2} = \frac{(-1)p!2^p}{2^2 1!(p-2)!}$$

$$c_{p-4}=\frac{-(p-2)(p-3)c_{p-2}}{8}=$$

$$\frac{(-1)^2(p-2)(p-3)p!2^p}{2^4 2(p-2)!}=\frac{(-1)^2 p!2^p}{2^4 2!(p-4)!}$$

$$c_{p-2k}=\frac{(-1)^k p!2^p}{2^{2k}k!(p-2k)!}$$

$$H_p(x)=\sum_{\text{k=0}}^{[p\backslash 2]}\frac{(-1)^k p!(2x)^{p-2k}}{k!(p-2k)!}$$

$$\left[\frac{p}{2}\right]=\begin{cases}\dfrac{p}{2} & p:even\\ \dfrac{p-1}{2} & p:odd\end{cases}$$

مثال(3)

<u>معادلة ليجندر التفاضلية</u>

Legendre Differential Equation:-

$(1-x^2)y``-2xy`+p(p+1)y=0$ …(1)

نقطة عادية $x=0$

$$\left(1-x^2\right)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^{n-1}+p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n + p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)(k+2)c_{k+2}-(k(k-1)+2k-p(p+1))c_k]x^k=0$$

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1)-p(p+1)}{(k+1)(k+2)}c_k = \frac{-(p-k)(p+k+1)}{(k+1)(k+2)}c_k \ldots(2)$$

$$c_2 = \frac{-p(p+1)c_\circ}{2!} \qquad ;c_3 = \frac{-(p-1)(p+2)c_1}{3!}$$

$$c_4 = \frac{-(p-2)(p+3)c_2}{4.3} \qquad ;c_5 = \frac{-(p-3)(p+4)c_3}{5.4}$$

$$c_4 = \frac{(p-2)p(p+1)(p+3)c_2}{4!} \qquad ;c_5 = \frac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)c_1}{5!}$$

$$y_1 = c_\circ\left(1 - \frac{p(p+1)}{2!}x^2 + \frac{(p-2)p(p+1)(p+3)}{4!}x^4 - \ldots\right)$$

$$y_2 = c_1\left(x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!}x^3 + \frac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{5!}x^5 - \ldots\right)$$

كثيرة حدود ليجندر

$$put \quad k = p-1 \quad in(2)$$

$$c_p = \frac{(2p)}{2^p (p!)^2}$$

$$c_{p-2}=\frac{-p\left(p-1\right)c_p}{2\left(2p-1\right)}=\frac{\left(-1\right)\left(2p-2\right)!}{2^p\left(p-1\right)!\left(p-2\right)!}$$

$$c_{p-4}=\frac{-\left(p-2\right)\left(p-3\right)c_{p-2}}{4\left(2p-3\right)}=\frac{\left(-1\right)^2\left(2p-4\right)!}{2^p2!\left(p-2\right)!\left(p-4\right)!}$$

$$c_{p-2k}=\frac{\left(-1\right)^k\left(2p-2k\right)!}{2^pk!\left(p-k\right)!\left(p-2k\right)!}$$

$$P_p\left(x\right)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{[p\backslash 2]}\frac{\left(-1\right)^k\left(2p-2k\right)!\left(x\right)^{p-2k}}{2^pk!\left(p-k\right)!\left(p-2k\right)!}$$

صيغة رودريغ

$$\frac{d^px^{2p-2k}}{dx^p}=\left(2p-2k\right)\frac{d^{p-1}x^{2p-2k-1}}{dx^{p-1}}=\ldots=$$

$$=\left(2p-2k\right)\ldots\left(p-2k+1\right)x^{p-2k}=\frac{\left(2p-2k\right)!x^{p-2k}}{\left(p-2k\right)!}$$

$$P_p\left(x\right)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{[p\backslash 2]}\frac{\left(-1\right)^k\frac{d}{dx}\left(x\right)^{2p-2k}}{2^pk!\left(p-k\right)!}$$

$$P_p\left(x\right)=\frac{1}{2^pp!}\frac{d^p}{dx^p}\sum_{\mathrm{k}=0}^{[p\backslash 2]}\frac{\left(-1\right)^kp!\left(x^2\right)^{p-k}}{k!\left(p-k\right)!}$$

$$P_p\left(x\right)=\frac{1}{2^pp!}\frac{d^p}{dx^p}\left(x^2-1\right)^p$$

$$p=0,1,2,3,\ldots$$

$p_0(x) = 1$

$p_1(x) = x$

$p_2(x) = (3x^2-1)/2$

$p_3(x) = (5x^3-3x)/2$

مثال(4)

معادلة ليجندر التفاضلية المصاحبة[4]1

$$\Phi''(\theta)+(\cot\theta)\Phi'+\left(\mu-r^2\cos ec\theta\right)\Phi=0 \qquad (1)$$

$$s=\cos\theta$$

$$\left(1-s^2\right)\frac{d^2\Phi}{ds^2}-2s\frac{d\Phi}{ds}+\left[k\left(k+1\right)-\frac{m^2}{1-s^2}\right]\Phi=0...(2)$$

$$r=m^2,\mu=k\left(k+1\right)$$

تختزل إلى معادلة ليجندر عندما $m = 0$

$$(1-s^2)\Phi'' - 2s\,\Phi' + k(k+1)\Phi = 0 \ \ldots \ (3)$$

وحلها كثيرة حدود ليجندر حسب صيغة رودريغ

$$\Phi=P_p\left(s\right)=\frac{1}{2^p\,p\,!}\frac{d^p}{ds^p}\left(s^2-1\right)^p...(4)$$

لنحصل على دوال ليجندر المصاحبة

$$P_{k,m}(\cos\theta)=\sin^m\theta P_k^{(m)}(\cos\theta) \qquad (5)$$

$$\frac{d^m}{ds^m}\left(\Phi''-2s\Phi'+k(k+1)\Phi\right)=\left(1-s^2\right)\Phi^{(m+2)}$$
$$-(2m+2)s\Phi^{(m+1)}+\left[k(k+1)-m(m+1)\Phi^{(m)}\right]=0$$

بضرب الطرفين في $\left(1-s^2\right)^{\frac{m}{2}}$

$$\left(1-s^2\right)^{1+\frac{m}{2}}\Phi^{(m+2)}-(2m+2)s\left(1-s^2\right)^{\frac{m}{2}}\Phi^{(m+1)}$$
$$+\left(1-s^2\right)^{\frac{m}{2}}\left[k(k+1)-m(m+1)\Phi^{(m)}\right]=0 \qquad (6)$$

$$put \quad g(s)=\left(1-s^2\right)^{\frac{m}{2}}\Phi^{(m)} \qquad (7)$$
$$\therefore \quad g'(s)=\left(1-s^2\right)^{\frac{m}{2}}\Phi^{(m+1)}-ms\left(1-s^2\right)^{\frac{m}{2}-1}\Phi^{(m)}$$
$$\therefore \quad \left(1-s^2\right)g'=\left(1-s^2\right)^{1+\frac{m}{2}}\Phi^{(m+1)}-ms\left(1-s^2\right)^{\frac{m}{2}}\Phi^{(m)}$$

$$\left(\left(1-s^2\right)g'\right)'=\left(1-s^2\right)^{1+\frac{m}{2}}\Phi^{(m+2)}-(m+2)s\left(1-s^2\right)^{\frac{m}{2}}\Phi^{(m+1)}$$
$$-ms\left(1-s^2\right)^{\frac{m}{2}}\Phi^{(m+1)}-m\left(1-s^2\right)^{\frac{m}{2}-1}\left[1-(m+1)s^2\right]\Phi^{(m)}$$

$$\left(\left(1-s^2\right)g'\right)' = \left(1-s^2\right)^{\frac{m}{2}}\left[m(m+1)-k(k+1)\right]\Phi^{(m)}$$
$$-m\left(1-s^2\right)^{\frac{m}{2}-1}\left[1-(m+1)s^2\right]\Phi^{(m)}$$
$$\left(1-s^2\right)g''(s)-2sg'(s)=\left[m(m+1)-k(k+1)\right]g(s)$$
$$-\frac{m\left[1-(m+1)s^2\right]g(s)}{1-s^2}=0$$
$$\left(1-s^2\right)g''(s)-2sg'(s)+\left[k(k+1)-\frac{m^2}{1-s^2}\right]g(s)=0$$

(2) تحقق معادلة ليجندر المصاحبة g(s) الدالة

$$g(s)=P_{k,m}(\cos\theta)=P_k^{(m)}(\cos\theta)$$

الفصل الثاني

الحلول حول النقاط الشاذة [2]$_4$

تعريف (2)

$$a_2(x)\,y^{``}+a_1(x)\,y^{`}+a_0(x)\,y=0\ldots.(1)$$

تسمى النقطة $x = x_0$: $a_2(x_0) = 0$ في معادلة (1) نقطة شاذة

تعريف (3)

إذا كتبنا المعادلة (1) على الصورة :

$y`` + p(x)y` + q(x)y = 0$ فإذا ظهر العامل $(x\text{-}x_0)$ على الأكثر من الدرجة الأولى في مقام P(x) وعلى الأكثر من الدرجة الثانية في مقام q(x) , $x=x_0$: تسمى نقطة شاذة منتظمة ما لم فهي نقطة شاذة غير منتظمة.

مثال(5)

واضح أن $x = \pm 2$ هما نقطتان شاذتان للمعادلة :

$$(x^2 - 4)^2 y'' + (x-2)y' + y = 0$$

$$y'' + \frac{1}{(x-2)(x+2)^2} y' + \frac{1}{(x-2)^2 (x+2)^2} y = 0$$

$x=2$ منتظمة,لأن $x-2$ يظهر على الأكثر من الدرجة الأولى في مقام

$P(x)$ وعلى الأكثر من الدرجة الثانية في مقام $q(x)$.

$x=-2$ غير منتظمة لأن$(x+2)$يظهر من الدرجة الثانية في مقام $P(x)$

تمارين

وضح النقاط الشاذة المنتظمة و غير المنتظمة

1) $x^2(x+1)^2 y'' + (x^2-1)y' + 2y = 0$

2) $x^2 y'' + xy' + y = 0$

3) $xy'' + y' + xy = 0$

نظرية (2): (فرض فربنيوس)

إذا كانت $x = x_0$ هي نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (1) فعلى الأقل يوجد حل واحد على صورة متسلسلة قوى

$$y = (x - x_\circ)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_\circ)^n$$

وإذا كانت $x_0=0$ فإن

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

وهنالك ثلا ثه حالات وفق جذور المعادلة المميزة:

أولا:

والفرق بينهما لا يساوي عدد صحيح فإنه يوجد حلان مستقلان $r_1 \neq r_2$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}, c_n \neq 0$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, b_n \neq 0$$

ثانيا:

الفرق بين الجذرين عدد صحيح موجب فإنه يوجد حلان مستقلان:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}, c_\circ \neq 0$$

$$y_2 = c y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, b_n \neq 0$$

ثالثا:

فإنه يوجد حلان مستقلان: جذر مكرر ، $r = r_1 = r_2$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, c_\circ \neq 0$$

$$y_2 = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+r}, b_n \neq 0$$

مثال (6)

أوجد حل المعادلة

$$3xy`` + y` - y = 0$$

الحل : سنفترض أن الحل

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$$

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}$$

$$3x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(3n+3r-2)c_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(3n+3r-2)c_nx^{n-1}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right]=0$$

$$x^r\left[r(3r-2)c_\circ x^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(3n+3r-2)c_nx^{n-1}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right]=0$$

ضع $k=n-1$ في المتسلسلة الأولى و $k=n$ في الثانية

$$x^r\left[r(3r-2)c_\circ x^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+r+1)(3k+3r+1)c_{k+1}-c_k\right]\right]x^k=0$$

الجذران$0 \neq c_0$,$r(3r-2)c_0 = 0$ و لدينا من المعادلة المميزة

وبمقارنة المعاملات بالصفر$r=2/3$, $r=0$

$$(k+r+1)(3k+3r+1)c_{k+1}-c_k=0$$

$$c_{k+1}=\frac{c_k}{(k+r+1)(3k+3r+1)},k=0,1,2,\dots$$

$$(i)\, r=\frac{2}{3}$$

$$c_{k+1}=\frac{c_k}{(k+1)(3k+5)}$$

$$c_1=\frac{c_\circ}{1.5},c_2=\frac{c_1}{2.8}=\frac{c_\circ}{2!.5.8}$$

$$c_3=\frac{c_\circ}{3!.5.8.11},\dots,$$

$$c_n=\frac{c_\circ}{n!.5.8.11\dots(3n+2)}$$

$$(ii)\, r=0$$

$$c_{k+1}=\frac{c_k}{(k+1)(3k+1)}$$

$$c_1=\frac{c_\circ}{1.1},c_2=\frac{c_1}{2.4}=\frac{c_\circ}{2!.1.4}$$

$$c_3=\frac{c_\circ}{3!.1.4.7},\dots$$

$$c_n=\frac{c_\circ}{n!.1.4.7\dots(3n-2)}$$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r_1}=c_\circ x^{\frac{2}{3}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_\circ x^{n+2\backslash 3}}{n!.5.8.11\dots(3n+2)}$$

$$y_2=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r_2}=c_\circ x^0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_\circ x^n}{n!.1.4.7...(3n-2)}$$

$y = c_1y_1 + c_2y_2$

مثال (7)

$xy'' + 3y' - y = 0 \dots (1)$

نقطة شاذة منتظمة و تصبح المعادلة :x=0. واضح أن

$$\sum_{n=0}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1}+3\sum_{n=0}(n+r)c_n x^{n+r-1}-\sum_{n=0}c_n x^{n+r}=0$$

$$x^r\left[\sum_{n=0}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n-1}+3\sum_{n=0}(n+r)c_n x^{n-1}-\sum_{n=0}c_n x^n\right]=0$$

$$x^r\left[r(r-1)c_\circ x^{-1}\sum_{n=1}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n-1}+3\sum_{n=1}(n+r)c_n x^{n-1}-\sum_{n=0}c_n x^n\right]=0$$

$$x^r\left[r(r+2)c_\circ x^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+r+1)(k+r+3)c_{k+1}-c_k\right]\right]x^k=0$$

جذور المعادلة المميزة : $r(r+2)=0$, $r = -2$, $r = 0$

وبمقارنة المعاملات بالصفر

$$(k+r+1)(k+r+3)c_{k+1}-c_k=0$$

$$c_{k+1}=\frac{c_k}{(k+r+1)(k+r+3)},k=0,1,2,...$$

$$(i)r=0$$

$$c_{k+1}=\frac{c_k}{(k+1)(k+3)}$$

$$c_1=\frac{c_\circ}{1.3}=\frac{2c_\circ}{3!},c_2=\frac{c_1}{2.4}=\frac{2c_\circ}{2!.4!}$$

$$c_3=\frac{2c_\circ}{3!.5!},...,$$

$$c_n=\frac{2c_\circ}{n!(n+2)!}$$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}c_\circ x^{n+r}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2c_\circ x^n}{n!(n+2)!}$$

$$y_2=y_1\ln x+\sum_{n=0}b_n x^{n-2}$$

$$y_2'=y_1'\ln x+\frac{y_1}{x}+\sum_{n=0}(n-2)b_n x^{n-3}$$

$$y_2''=y_1''\ln x+2\frac{y_1'}{x}-\frac{y_1}{x^2}+\sum_{n=0}(n-2)(n-3)b_n x^{n-4}$$

وبالتعويض عن قيم $y_2,y`_2,y``_2$ في معادلة (1) ينتج :

$$\ln x\left(y_1'' + 3y_1' - y\right) + 2y_1' + 2\frac{y_1}{x} + \sum_{n=0}(n-2)(n-3)b_n x^{n-3}$$

$$+3\sum_{n=0}(n-2)b_n x^{n-3} - \sum_{n=0} b_n x^{n-2} = 0$$

$$2y_1' + 2\frac{y_1}{x} + \sum_{n=0} n(n-2)b_n x^{n-3} - \sum_{n=0} b_n x^{n-2} = 0$$

$$\because y_1 = \sum_{n=0}\frac{2x^n}{n!(n+2)!}$$

$$\therefore y_1' = \sum_{n=0}\frac{2nx^{n-1}}{n!(n+2)!}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4nx^{n-1}}{n!(n+2)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4x^{n-1}}{n!(n+2)!} +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-2)b_n x^{n-3} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-2} = 0$$

$$0(-2)b_\circ x^{-3} + (-b_\circ - b_1)x^{-2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(n+1)x^{n-1}}{n!(n+2)!}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-2)b_n x^{n-3} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-2} = 0$$

$$-(b_\circ + b_1) + \sum\left[\frac{4(\mathrm{k}+1)}{\mathrm{k}!(\mathrm{k}+2)!} + \mathrm{k}(\mathrm{k}+2)\mathrm{b}_{\mathrm{k}+2} - \mathrm{b}_{\mathrm{k}+1}\right]\mathrm{x}^{\mathrm{k}-1} = 0$$

$$b_1 = -b_\circ, \frac{4(\mathrm{k}+1)}{\mathrm{k}!(\mathrm{k}+2)!} + \mathrm{k}(\mathrm{k}+2)\mathrm{b}_{\mathrm{k}+2} - \mathrm{b}_{\mathrm{k}+1} = 0$$

$$k = 0, b_1 = 2, b_\circ = -2$$

$$b_{k+2}=\frac{\mathrm{b_{k+1}}}{\mathrm{k(k+2)}}-\frac{\mathrm{4(k+1)}}{\mathrm{k!(k+2)!k}\left(\mathrm{k+2}\right)}$$

$$k=1;\quad b_3=\frac{b_2}{3}-\frac{4}{9}$$

$$k=2;\quad b_4=\frac{b_3}{8}-\frac{1}{32}=\frac{b_2}{24}-\frac{25}{288},\dots$$

$$y_2=y_1\ln x+b_\circ x^{-2}+b_1x^{-1}+b_2+b_3x+b_4x^2\dots$$

$$y_2=y_1\ln x+-2x^{-2}+2x^{-1}+b_2+\left(\frac{b_2}{3}-\frac{4}{9}\right)x+\left(\frac{b_2}{24}-\frac{25}{288}\right)x^2\dots$$

مثال (8)

xy`` + y` - 4y = 0 … (1)

واضح أن x=0 نقطة شاذة منتظمة وتصبح المعادلة

$$\sum_{n=0}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}(n+r)c_nx^{n+r-1}-4\sum_{n=0}c_nx^{n+r}=0$$

$$x^r\left[\sum_{n=0}(n+r)^2c_nx^{n-1}-4\sum_{n=0}c_nx^n\right]=0$$

$$x^r\left[r^2c_\circ x^{-1}+\sum_{n=1}(n+r)^2c_nx^{n-1}-4\sum_{n=0}c_nx^n\right]=0$$

$$x^r\left[r^2c_\circ x^{-1}+\sum_{k=0}(k+r+1)^2c_{k+1}x^k-4\sum_{k=0}c_kx^k\right]=0$$

$$x^r\left[r^2c_\circ x^{-1}+\sum_{k=0}\left[(k+r+1)^2c_{k+1}-4c_k\right]x^k\right]=0$$

r = 0, جذرا المعادلة المميزة مكرر وبمقارنة المعاملات بالصفر

$$(k+r+1)^2 c_{k+1} - 4c_k = 0$$

$$c_{k+1} = \frac{4c_k}{(k+r+1)^2}$$

$$r = 0$$

$$c_{k+1} = \frac{4c_k}{(k+1)^2}$$

$$c_n = \frac{4^n}{(n!)^2} c_\circ$$

$$y_1 = \sum_{n=0} \frac{4^n x^n}{(n!)^2}$$

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1} b_n x^n$$

$$y_2' = y_1' \ln x + \frac{y_1}{x} + \sum_{n=1} n b_n x^{n-1}$$

$$y_2'' = y_1'' \ln x + 2\frac{y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2} + \sum_{n=1} n(n-1) b_n x^{n-2}$$

وبالتعويض عن قيم $y_2, y`_2, y``_2$ في معادلة (1) ينتج :

$$\ln x \left(x y_1'' + y_1' - 4y \right) + 2y_1' + \sum_{n=2} n(n-1) b_n x^{n-1}$$

$$+ \sum_{n=1} n b_n x^{n-1} - 4\sum_{n=0} b_n x^n = 0$$

$$2y_1' + \sum_{n=1} n^2 b_n x^{n-1} - 4\sum_{n=0} n b_n x^n = 0$$

$$\because y_1 = \sum_{n=0} \frac{4^n x^n}{(n!)^2}$$

$$\therefore 2\sum_{n=0} \frac{n.4^n.x^{n-1}}{(n!)^2} + \sum_{n=1} n^2 b_n x^{n-1} - 4\sum_{n=0} b_n x^n = 0$$

$$8 + b_1 + 2\sum_{n=2} \frac{n.4^n.x^{n-1}}{(n!)^2} + \sum_{n=2} n^2 b_n x^{n-1} - 4\sum_{n=0} b_n x^n = 0$$

$$8 + b_1 + \left[\sum_{k=1} 2.4^{k+1} \frac{(k+1)}{\left[(k+1)!\right]^2} + (k+1)^2 b_{k+1} - 4b_k\right] x^k$$

$$b_{k+1} = \frac{4\ \mathrm{b_k}}{(\mathrm{k}+1)^2} - \frac{2.\ 4^{\mathrm{k}+1}}{(\mathrm{k}+1)\left[(\mathrm{k}+1)!\right]^2}$$

$$b_1 = -8, b_2 = b_1 - 4 = -12, \quad b_3 = \frac{4}{9} b_2 - \frac{32}{27} = -\frac{176}{27}$$

$$y_2 = y_1 \ln x - 8x - 12x^2 - \frac{176}{27} x^3 - \dots$$

<u>تعريف (4) دالة قاما</u>

تعرف دالة قاما بالتكامل

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

<u>مثال (9)</u>: برهن أن

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

الحل:عن طريق التكامل بالتجزئة

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-t}dt$$

$$u=t^{n-1} \qquad , \qquad du=(n-1)t^{n-2}dt$$

$$dv=e^{-t}dt \qquad , \qquad v=-e^{-t}$$

$$\therefore \Gamma(n)=-e^{-t}.t^{n-1}\Big|_0^{\infty}+(n-1)\int_0^{\infty} t^{(n-1)-1}e^{-t}$$

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$

$$\therefore \Gamma(n)=(n-1)(n-2)...3.2.1.=(n-1)!$$

مثال(10)

معادلة بسل التفاضلية

$$x^2y`` + xy` + (x^2 - m^2)y = 0 \quad ...(1)$$

نقطة شاذة . $x = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r+2}-m^2\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}=0$$

$$=x^r\left[\left(r^2-m^2\right)c_\circ+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(n+r\right)^2-m^2\right]c_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+2}\right]=0...(2)$$

$r^2 - m^2 = 0$; $r_1 = m$, $r_2 = -m$

(i) $r = m$

$$= x^{r}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n\left(n+2m\right)c_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}\right] = 0$$

$$= x^{r}\left[\left(1+2m\right)c_1 x + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(k+2\right)\left(k+2+2m\right)c_{k+2} - c_k\right] x^{k=2}\right] = 0$$

$$\left(1+2m\right)c_1 = 0, c_1 = 0 = c_3 = c_5 = \ldots$$

$$c_{k+2} = \frac{-1}{\left(k+2\right)\left(k+2+2m\right)} c_k \ldots (3)$$

$$k+2 = 2n$$

$$c_{2n} = \frac{-1}{2^2 n\left(n+m\right)} c_{2n-2}$$

$$c_2 = \frac{-1}{2^2\left(1+m\right)} c_{\circ}$$

$$c_4 = \frac{-1}{2^2 2\left(2+m\right)} c_2 = \frac{\left(-1\right)^2}{2^4 2!\left(1+m\right)\left(2+m\right)} c_{\circ}$$

$$c_{2n} = \frac{\left(-1\right)^n}{2^{2n} n!\left(1+m\right)\left(2+m\right)\ldots\left(n+m\right)} c_{\circ}$$

$$c_{\circ} = \frac{1}{2^m \Gamma\left(1+2m\right)}$$ ثابت اختياري عمليا له قيمة

$$c_{2n} = \frac{\left(-1\right)^n}{2^{2n+m} n!\Gamma\left(1+m\right)\left(1+m\right)\left(2+m\right)\ldots\left(n+m\right)}$$

$$c_{2n} = \frac{\left(-1\right)^n}{2^{2n+m} n!\Gamma\left(1+n+m\right)}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}}{n!\Gamma\left(1+n+m\right)} = J_m\left(x\right)$$

(ii) r = -m

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m}}{n!\Gamma(1+n-m)}=J_{-m}(x)$$
$$Y=c_1J_m(x)+c_2J_{-m}(x)$$

مثال (11)

$x^2y`` + xy` + (x^2 - 1/2^2)y = 0$ ...(1)

وهي حالة خاصة من معادلة بسل و بالتعويض في في الصيغة التكرارية (3) في المثال السابق عن

$$m=\frac{1}{2}$$
$$c_{k+2}=\frac{-1}{(k+2)(k+2+2m)}c_k$$
$$ck=\frac{-1}{k(k+2)}c_{k-2}$$
$$c_2=\frac{-c_\circ}{3!}$$
$$c_4=\frac{-c_2}{5.4}=\frac{c_\circ}{5!}$$

$$y_1=c_\circ\sqrt{x}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right)$$
$$y_1=\frac{c_\circ}{\sqrt{x}}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)$$
$$y_1=\frac{c_\circ}{\sqrt{x}}\sin x$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a(x)dx}dx}{y_1^2}$$

$$y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \int \frac{e^{-\int \frac{dx}{x}}dx}{\frac{\sin^2 x}{x}} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \int \cos ec^2 x dx = -\frac{\sin x}{\sqrt{x}} . \cot x$$

$$\therefore y_2 = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

$$\therefore y = A\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + B\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

تمارين

برهن

(i) $xJ_m` = mJ_m - x\,J_{m+1}$

(ii) $xJ_m` = xJ_{m-1} - mJ_m$

(iii) $xJ_{m+1} - 2mJ_m + xJ_{m-1}$

(iv) $J_{1/2} = (2/\pi x)^{1/2}\sin x$

(v) $J_{-1/2} = (2/\pi x)^{1/2}\cos x$

(vi) $(\frac{2h+1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi}(2h+1)!}{2^{2h+1}h!}$

(vii) $I_{2k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} \times dx = \frac{2^{2k}k!k!}{(2k+1)!}$

(viii) $I_{2h,2k} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2h} \times \cos^{2k} \times dx = \frac{(2h)!\frac{\pi}{2}(2k)!}{2^{2h}h!(h+k)!k!2^{2k}}$

نظرية (3)

دالة بيتا: Beta Function

$$I=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=B(\alpha;\beta)$$

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

البرهان

$$I_{2h+1;2k+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2h+1}\times cox^{2k+1}\times dx$$

لدينا من التمارين الأخيرة فقرة (viii) فان :

$$I_{2h;2k}=\frac{(2h)!\frac{\pi}{2}(2k)!}{2^{2h}h!(h+k)!k!2^{2k}}\dots(1)$$

ضع $2h\equiv 2h+1$ ، $2k\equiv 2k+1$

$$I_{2h+1;2k+1}=\frac{(2h+1)!\frac{\pi}{2}(2k+1)!}{2^{2h+1}(\frac{2h+1}{2})!(\frac{2h+2k+2}{2})!(\frac{2k+1}{2})!2^{2k+1}}$$

ولدينا من التمارين الأخيرة فقرة (vi) فان :

$$(\frac{2h+1}{2})!=\frac{\sqrt{\pi}(2h+1)!}{2^{2h+1}h!}$$

$$(\frac{2k+1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi}(2k+1)!}{2^{2k+1}k!}$$

$$\therefore I_{2h+1;2k+1} = \frac{h!k!}{2(h+k+1)!} \dots (2)$$

$$I = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

ضــــــع

$$x = \sin^2\theta$$
$$dx = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} s\,in^{2\alpha-2}\theta\cos^{2\beta-2}\theta\sin\theta\cos\theta d\theta \dots (3)$$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha-1}\theta\cos^{2\beta-1}\theta d\theta$$

ولدينا من (2)

$$I_{2h+1;2k+1} = \frac{h!k!}{2(h+k+1)!}$$

ضع $h = \alpha - 1$ و $k = \beta - 1$

$$2h+1 = 2\alpha - 1 \qquad 2k+1 = 2\beta - 1$$

$$\therefore I_{2\alpha-1,2\beta-1}=\frac{(\alpha-1)!(\beta-1)!}{2(\alpha+\beta-1)!}$$

من معادلة (3) فان :

$$I=2I_{2\alpha-1,2\beta-1}=\frac{2(\alpha-1)!(\beta-1)!}{2(\alpha+\beta-1)!}$$

$$=\frac{(\alpha-1)!(\beta-1)!}{(\alpha+\beta-1)!}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

مثال(12) برهن أن

$$\Gamma=\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

بوضع $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ في المعادلة (3) ينتج

$$\Gamma=\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

مثال 13

برهن أن

$$\int_0^\infty e^{-s^2}ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

البرهان

$$\because \Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

$$put \quad t=s^2$$

$$\Gamma(x)=2\int_0^\infty s^{2x-1}e^{-s^2}ds$$

$$put \quad x=\frac{1}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}$$

$$\therefore 2\int_0^\infty e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-s^2}ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

<u>تعريف (5) (صيغة قاما التكاملية)</u>

تعرف دالة قاما من خلال التكامل الآتي

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \ldots(1)$$

<u>تعريف (6) (صيغة يُلر لدالة قاما)</u>

$$\Gamma(z,n)=\frac{n!.n^{z}}{z(z+1)(z+2)...(z+n)}...(2)$$

$n=1,2,3,...$

<u>نظرية (4)</u>

صيغتا قاما في تعريفين 2 و 3 السابقين متكافئان .

البرهان

انطلاقاً من صيغة يُلر ، لدينا

$$\Gamma(z,n)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{z}\frac{1}{z}\prod_{r=1}^{n}\left[\left(1+\frac{1}{r}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{r}\right)^{-1}\right]$$

$$\because\left(1+\frac{1}{r}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{r}\right)^{-1}=1+\frac{z(z-1)}{2r^{2}}+O\left(\frac{1}{r^{3}}\right)$$

كبيرة فإن حاصل الضرب اللانهائي الآتي r عندما تصبح

$$\frac{1}{z}\prod_{r=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{r}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{r}\right)^{-1}\right]$$

يتقارب مطلقاً بانتظام – في النطاق المغلق المحدود - نحودالة تحليلية

$$\Gamma(z,n)\xrightarrow{uniformaly}F(z)=\Gamma(z)$$

كالآتي

$$\Gamma(z,n) = n^z \int_0^1 (1-T)^n T^{z-1} dT$$

$$\Gamma(z,n) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt$$

$$\Gamma(z,n) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(z,n) \xrightarrow{n\to\infty} \Gamma(z)$$

<u>تعريف(7)</u> <u>Digamma Function</u>

وتعرف على أنها تفاضل لوغاريتم دالة قاما ، أي أن

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\log\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \ldots(1)$$

وإذا كانت عدد صحيح موجب فإن

$$\psi(n) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\gamma\right) \ldots(2)$$

لاحظ: $\psi(1) = -\gamma$

<u>تعريف(8) **(ثابت يُلر)**</u>

يعرف ثابت يُلر كالآتي

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\ln k\right) \ldots(3)$$

نظرية(5)

ثابت يُلر يُعطى منخلال المتراجحة :

$$0<\gamma<1$$

البرهان

لإيجاد ثابت يُلر γ ، ضع

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\log n$$
$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\log(n+1)+\log n$$
$$=\frac{1}{n+1}+\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<0$$

$$I=\int_1^n\frac{dt}{t}=\int_1^2\frac{dt}{t}+\int_2^3\frac{dt}{t}+...+\int_{n-1}^n\frac{dt}{t}$$
$$>\int_1^2\frac{dt}{2}+\int_2^3\frac{dt}{3}+...+\int_{n-1}^n\frac{dt}{n}$$

$$\therefore I>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n};...(i)$$
$$I=\int_1^n\frac{dt}{t}<\int_1^2\frac{dt}{1}+\int_2^3\frac{dt}{2}+...+\int_{n-1}^n\frac{dt}{n-1}$$
$$\therefore I<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1};...(ii)$$

$$\therefore 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}>\int_1^n\frac{dt}{t}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$

$$\therefore -\frac{1}{n}>\int_1^n\frac{dt}{t}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)>-1$$

$$\therefore -\frac{1}{n}>-u_n>-1$$

$$\therefore \frac{1}{n}<u_n<1$$

$$\therefore 0<u_{n\to\infty}<1$$

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}u_n\approx 0.5772$$

<u>مثال 14</u>

إذا كان $\sin z=z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2k^2}\right)$

برهن أن $\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}=\frac{\sin\pi z}{\pi}$

البرهن لدينا من صيغة يُلر

$$\Gamma(z,n)=\frac{n!.n^z}{z(z+1)(z+2)...(z+n)}$$

$$\therefore \frac{1}{\Gamma(z,n)}=n^{-z}z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)...\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

$$=n^{-z}z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)$$

الضرب اللانهائي $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)$ يتباعد ، ونستعين بالعامل التكاملي $e^{-\frac{z}{k}}$

$$\frac{1}{\Gamma(z,n)} = ze^{z\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right]$$
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right]$$

تتقارب .

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right]$$
$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{1}{-z\,\Gamma(-z)} = e^{-\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{k}\right)e^{\frac{z}{k}}\right]$$
$$\therefore \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = z\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right]\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{k}\right)e^{\frac{z}{k}}\right]$$
$$= z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi}$$

تمارين

١) برهن أن $\sin z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right)$

٢) برهن أن $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

٣) برهن أن $(2n)! = \frac{2^{2n}\,n!}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$

٤) إذا كانت $\psi(z) = \frac{d}{dz}\log\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ برهن أن

$$i)\psi(1-z)-\psi(z)=\pi\cot\pi z$$
$$ii)\psi(z)=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+z}\right)$$

مثال 15

معادلة الالتقاء فوق الهندسية

The Conflict Hypergeometric Differential Equation.[3] $_2$

$$xy''+(\gamma-x)y'+\alpha y=0 \qquad (1)$$

نقطة شاذة منتظمة x=0

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)+\gamma(n+r)]c_n x^{n+r-1}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r}-\alpha\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}=0$$

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r+\gamma-1)c_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+\alpha)c_n x^n\right]=0$$

$$x^r\left[r(r+\gamma-1)c_\circ x^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r+\gamma-1)c_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+\alpha)c_n x^n\right]=0$$
$$r_1=0;r_2=1-\gamma$$
$$x^r\left[\sum_{k=0}((k+r+1)(k+r+\gamma)c_{k+1}-(k+r+\alpha)c_k)x^k\right]=0 \qquad (2)$$

$$(i)\, r_1 = 0$$

$$c_{k+1} = \frac{(k+\alpha)}{(1+k)(\gamma+k)} c_k \qquad (3)$$

$$c_1 = \frac{(\alpha)}{(1)(\gamma)} c_\circ$$

$$c_2 = \frac{(1+\alpha)}{2!(\gamma+1)} c_1 = \frac{(\alpha)(1+\alpha)}{2!\gamma(\gamma+1)} c_\circ$$

$$c_n = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)} c_\circ$$

$$c_n = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+n)}{n!\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+n)} c_\circ$$

$$y_1 = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n) x^n}{n!\Gamma(\gamma+n)}$$

$$y_1 = F_1(\alpha, \gamma, x) \qquad (4)$$

$$(ii)\, r_2 = 1-\gamma$$

$$c_{k+1} = \frac{(k+\alpha+1-\gamma)}{(1+k)(2-\gamma+k)} c_k$$

ينتج بمقارنة(3) مع (5) :

$$\gamma \equiv 2-\gamma$$

$$\alpha \equiv \alpha-\gamma+1$$

$$c_n=\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1+n)}{n!\Gamma(2-\gamma+n)}c_\circ$$

$$y_2=x^{1-\gamma}\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1+n)x^n}{n!\Gamma(2-\gamma+n)};c_\circ=1$$

$$y_2=x^{1-\gamma}F_2(\alpha-\gamma+1,2-\gamma,x)$$

مثال(16)

المعادلة التفاضلية فوق الهندسية Hypergeometric [3]*1*

$$x(x-1)F''+\left[(\alpha+\beta+1)x-\gamma\right]F'+\alpha\beta F=0 \qquad (1)$$

واضح أن $x=0$ نقطة شاذة منتظمة ونفرض $F=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1}$$
$$+(\alpha+\beta+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r}-\gamma\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}+\alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}=0$$

$$x^r(\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r+-1)+(\alpha+\beta+1)(n+r)+\alpha\beta\right]c_n x^n$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r+-1)+\gamma(n+r)\right]c_n x^{n-1})=0$$

$$x^r[(-r(r-1)-r\gamma)c_0x^{-1}+\sum_{k=0}[(k+r)(k+r-1)+(\alpha+\beta+1)(k+r)$$

$$+\alpha\beta]c_k-[(k+r+1)(k+r)+\gamma(k+r+1)]c_{k+1}]x^k=0\ldots(2)$$

$r_1 = 0$, $r_2 = 1- \gamma$

(i) $r_1 = 0$

$$c_{k+1} = \frac{\left[k\left(k+\alpha+\beta\right)+\alpha\beta\right]}{\left(1+k\right)\left(\gamma+k\right)}c_k = \frac{\left[\left(k+\alpha\right)+\left(k+\beta\right)\right]}{\left(1+k\right)\left(\gamma+k\right)}c_k \text{ ...(3)}$$

$$c_1 = \frac{\left[\alpha\beta\right]}{\left(1\right)\left(\gamma\right)}c_\circ$$

$$c_2 = \frac{\left(\alpha+1\right)\left(\beta+1\right)}{2\left(1+\gamma\right)}c_1 = \frac{\alpha\left(\alpha+1\right)\beta\left(\beta+1\right)}{2!\gamma\left(\gamma+1\right)}c_\circ$$

$$c_3 = \frac{\alpha\left(\alpha+1\right)\left(\alpha+2\right)\beta\left(\beta+1\right)\left(\beta+2\right)}{3!\gamma\left(\gamma+1\right)\left(\gamma+2\right)}c_\circ$$

$$c_n = \frac{\alpha\left(\alpha+1\right)\left(\alpha+2\right)...\left(\alpha+n-1\right)\beta\left(\beta+1\right)\left(\beta+2\right)...\left(\beta+n-1\right)}{n!\gamma\left(\gamma+1\right)\left(\gamma+2\right)...\left(\gamma+n-1\right)}c_\circ$$

$$c_n = \frac{\Gamma\left(\gamma\right)\Gamma\left(\alpha+n\right)\Gamma\left(\beta+n\right)}{n!\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)\Gamma\left(\gamma+n\right)}c_\circ \text{...(4)}$$

$$F_1 = \sum_{n=0} c_n x^{n+r} = c_\circ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\gamma\right)\Gamma\left(\alpha+n\right)\Gamma\left(\beta+n\right)}{n!\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)\Gamma\left(\gamma+n\right)}$$

$$F_1 = F_1\left(\alpha,\beta,\gamma,x\right) \qquad \left(5\right)$$

(ii) $r_2 = 1- \gamma$,

(2) = [(k-+1)(k-γ)+ (α+β+1)(k-γ+1)+αβ]c_k

– [(k- γ +2)(k+1- γ) +γ(k- γ +2)]c_{k+1}= 0

$$c_{k+1}=\frac{\left[\left(k-\gamma+1\right)\left(\left(k-\gamma+1+\alpha+\beta\right)\right)+\alpha\beta\right]}{\left(1+k\right)\left(2-\gamma+k\right)}c_k$$

$$c_{k+1}=\frac{\left[\left(k+\alpha+1-\gamma\right)\left(k+\beta+1-\gamma\right)\right]}{\left(1+k\right)\left(\gamma+k\right)}c_k \ldots(6)$$

وبمقارنة (5) مع (6) ينتج

$r_2=1-\gamma$, $\beta=\beta-\gamma+1$, $\alpha=\alpha-\gamma+1$,$\gamma=2-\gamma$

ويصبح الحل

$$F_2=x^{1-\gamma}F_1\left(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x\right)$$

مثال(17)

معادلة لاقوري المصاحبة

The Associated Laguerre Differential Equation

xy``+ (m+1-x)y` + ny = 0 … (1)

الحل

بالمقارنة مع معادلة الالتقاء السابقة

$$xy''+\left(\gamma-x\right)y'+\alpha y=0 \qquad (2)$$

$$n=-\alpha$$

$$\gamma=m+1$$

وبما أن حل معادلة الالتقاء هو

$$y = F_1(\alpha,\gamma,x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0} \frac{\Gamma(\alpha+n)x^n}{n!\Gamma(\gamma+n)}$$

$$F_1\ (-n\ ,\ m+1,x) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(-n)} \sum_{k=0} \frac{\Gamma(k-n)x^k}{n!\Gamma(k+m+1)} ...(4)$$

Γ(k-n) =(k-n-1)!= (k-n-1)(k-n-2)…(k-n-(k-1))!

= (k-n-1)(k-n-2)…(2-n)(1-n)(-n) Γ(-n)

= $(-1)^k$ Γ(-n)n(n-1)…(n-k+2)(n-k+1)(n-k)!/(n-k)!

Γ(k-n) = $(-1)^k$ n! Γ(-n) / (n-k)! …(5)

بتعويض (4) في (5) ينتج:

$$F_1\ (-n\ ,\ m+1,x) = \frac{m!}{\Gamma(-n)} \sum_{k=0} \frac{(-1)^k\ n!\Gamma(-n)x^k}{k!(n-k)!(k+m)!}$$

$$F_1\ (-n\ ,\ m+1,x) = \sum_{k=0} \frac{(-1)^k\ n!m!x^k}{k!(n-k)!(k+m)!} = L_{m,n}(x)$$

الدالة المولدة

نظرية (6) الدالة المولدة لكثيرة حدود ليجندر [1]6

$$\left(1-2xt+t^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_{n}\left(x\right)t^{n}$$

البرهان : باستخدام مفكوك ذات الحدين

$$\left(1+x\right)^{p}=\binom{p}{0}+\binom{p}{1}x+\binom{p}{2}x^{2}+\binom{p}{3}x^{3}+\dots$$

$$\left[1-\left(2xt-t^{2}\right)\right]^{\frac{-1}{2}}=1+\frac{1}{2}\left(2xt-t^{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{\left(2xt-t^{2}\right)^{2}}{2!}$$

$$+\dots+\frac{1}{2}\frac{3}{2}\dots\frac{\left(2p-1\right)}{2}\frac{\left(2xt-t^{2}\right)^{p}}{p!}+\dots$$

تظهر من الحد t^{p} من قوى p وأدنى :

$$\left(2xt-t^{2}\right)^{p}=t^{p}\left(2x-t\right)^{p}$$

$$\frac{1}{2}\frac{3}{2}\dots\frac{\left(2p-1\right)}{2}\frac{\left(2x\right)^{p}}{p!}-\frac{1}{2}\frac{3}{2}\dots\frac{\left(2p-3\right)}{2}\frac{\left(p-1\right)}{1!}\frac{\left(2x\right)^{p-2}}{\left(p-1\right)!}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{3}{2}\dots\frac{\left(2p-5\right)}{2}\frac{\left(p-2\right)\left(p-3\right)}{2!}\frac{\left(2x\right)^{p-4}}{\left(p-1\right)!}-\dots$$

$$\therefore\frac{\left(2p\right)!x^{p}}{2^{p}\left(p!\right)^{2}}-\frac{\left(2p-2\right)!x^{p-2}}{2^{p}\left(p-1\right)!\left(p-2\right)!}+\frac{\left(2p-4\right)!x^{p-4}}{2^{p}2!\left(p-2\right)!\left(p-4\right)!}-\dots$$

$$P_p(x)=\sum_{k=0}^{[p\backslash 2]}\frac{(-1)^k(2p-2k)!(x)^{p-2k}}{2^p k!(p-k)!(p-2k)!}$$

نظرية(7)[5]$_1$

الدالة المولدة لكثيرة حدود هيرمت

$$e^{(2xt-t^2)}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^p}{p!}H_p(x)$$

البرهان

والحدود الأدنى لمفكوكP والتي تظهر فقط في الحد t^pلإيجاد معاملات

$t^p(2x-t)^p$ $t^p(2x-t)^p$

$$\frac{t^p}{p!}(2x-t)^p=\frac{t^p}{p!}\left[(2x)^p-\ldots\right]$$

معامل $\frac{t^p}{p!}\equiv(2x)^p$:

$$\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}(2x-t)^{p-1}=\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\left[(2x)^{p-1}-(p-1)(2x)^{p-2}t+\ldots\right]$$

: معامل$\frac{t^p}{p!}\equiv-p(p-1)(2x)^{p-2}=\frac{-p!}{(p-2)!}(2x)^{p-2}$

$$\frac{t^{p-2}}{(p-2)!}(2x-t)^{p-2}=$$

$$\frac{t^{p-2}}{(p-2)!}\left[(2x)^{p-2}-(p-2)(2x)^{p-3}t+\frac{(p-2)(p-3)}{2!}(2x)^{p-4}t^{2}\ldots\right]$$

$$\frac{t^{p}}{p!}\equiv -p(p-1)(p-2)(p-3)\frac{(2x)^{p-4}}{2!}=\frac{p!}{2!(p-4)!}(2x)^{p-4}$$

وتصبح متسلسلة معاملات $t^p/p!$ هي

$$H_p(x)=\sum_{k=0}^{[p\backslash 2]}\frac{(-1)^k\, p!(2x)^{p-2k}}{k!(p-2k)!}$$

<u>مثال(18)</u>

برهن كثيرة حدود هيرمت

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\,\frac{\partial^n e^{-x^2}}{\partial x^n}$$

البرهان: لدينا الدالة المولدة

$$K(x,t)=e^{\left(2xt-t^2\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^p}{p!}H_p(x) \qquad (1)$$

باشتقاق معادلة (1) n مرة بالنسبة للمتغير t

$$H_n(x) = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} K(x,t) \right]_{t=0}$$

$$K(x,t) = e^{x^2} e^{-(x-t)^2}$$

$$H_n(x) = e^{x^2} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} \right]_{t=0}$$

لاحظ أن

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-(x-t)^2} \quad \ldots(5)$$

لتصبح

$$e^{x^2} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} \right\}_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-(x-t)^2} \right\}_{t=0}$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2}$$

$H_0 = 1$

$H_1 = 2x$

$H_2 = 4x^2 - 2$

$H_3 = 8x^3 - 12x$

الفصل الرابع

التعامد

تعريف(8)

يقال أن الدالتين متعامدتان إذا كان الضرب الداخلي لهما

$$f\,,g\in c\left[a,b\right]$$

$$\left(f\,,g\right)=\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx=0$$

نظرية(8)

كثيرة حدود هيرمت تحقق علاقة التعامد

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_k\left(x\right)H_j\left(x\right)dx=\begin{cases}2^k\,k\,!\sqrt{\pi} & ;k=j\\ 0 & ;k\neq j\end{cases}$$

البرهان : لدينا كثيرة حدود هيرمت التي تحقق معادلة هيرمت على النحو :

$$y''-2xy'+\lambda y=0$$

$$H_k''-2xH_k'+\lambda H_k=0 \qquad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_k''\left(x\right)H_j\left(x\right)dx-2\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}H_k'\left(x\right)H_j\left(x\right)dx$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\lambda_k e^{-x^2}H_k\left(x\right)H_j\left(x\right)dx=0 \qquad (2)$$

نكامل التكامل الأوسط بالتجزئة

$$u = H_k'(x)H_j(x) \qquad du = \left(H_k''H_j + H_k'H_j'\right)dx$$

$$dv = -2xe^{-x^2} \qquad v = e^{-x^2}$$

$$\int udv = 0 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left(H_k''H_j + H_k'H_j'\right)dx$$

$$(2) = \int e^{-x^2}H_k'(x)H_j'(x) + \lambda_k \int e^{-x^2}H_k(x)H_j(x)dx \qquad (2')$$

نحصل بصورة مشابهة على(1) في k بدل j بتغيير

$$\int e^{-x^2}H_k'(x)H_j'(x) + \lambda_j \int e^{-x^2}H_k(x)H_j(x)dx \qquad (3')$$

$$(2') - (3') = \left(\lambda_k - \lambda_j\right)\int e^{-x^2}H_k(x)H_j(x)dx = 0$$

$$\int e^{-x^2}H_k(x)H_j(x)dx = 0, \quad k \neq j \qquad (4)$$

$$e^{-x^2}e^{2tx-t^2}e^{2sx-s^2} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k s^j}{k!\,j!}e^{-x^2}H_kH_j = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{2tx-t^2}e^{2sx-s^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k s^j}{k!\,j!}e^{-x^2}H_kH_j = 0 \qquad (i)$$

$$e^{2st}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[x-(s+t)\right]^2}d\left[x-(s+t)\right] = e^{2st}\sqrt{\pi} = \sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\pi}\,\frac{(2st)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\pi}k!2^k\,\frac{(st)^k}{k!k!} \qquad (ii)$$

بمقارنة المعاملات من تساوي (ii) و(i)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_k(x)H_j(x)dx = 2^k k!\sqrt{\pi}, \quad k = j$$

نظرية (9)

تعامد دوال ليجندر

$$\int_{-1}^{1} p_k(s)\, p_j(s)\, ds = 0, k \neq j \qquad (1)$$

بما أن $p_k(s)$ حل لمعادلة ليجندر

$$(1-s^2)\Phi`` - 2s\Phi + k(k+1)\Phi = 0$$

$$((1-s^2)p_k`)` + k(k+1)p_k(s) = 0 \ldots (2)$$

$$\int p_j((1-s^2)p_k`)`ds + k(k+1)\int p_j\, p_k(s)ds = 0$$

التكامل الأول باستخدام التكامل بالتجزئة

$$-\int(1-s^2)p_j`p_k`ds + k(k+1)\int p_j\, p_k(s)ds = 0 \ldots (3)$$

بصورة مشابهة

$$-\int(1-s^2)p_j`p_k`ds + j(j+1)\int p_j(s)p_k(s)ds = 0 \ldots (4)$$

$$[k(k+1)-j(j+1)]\int p_j(s)p_k(s)ds = 0$$

$$\int p_j(s)\, p_k(s)ds = 0 \qquad , \quad j \neq k$$

نظرية (10)

$$-\int_{-1}^{1} p_k^2(s)\, ds = \frac{2}{2k+1}$$

لدينا من صيغة رودريغ

$$P_k(s) = \frac{1}{2^k\, k!} \frac{d^k}{ds^k} \left(s^2 - 1\right)^k$$

$$\because \frac{d^k}{ds^k}\left(s^2-1\right)^k=\left(2k\right)!$$

فإن

$$\left(2^k k!\right)^2 \int_{-1}^{1} p_k^2\left(s\right)ds=\int_{-1}^{1}\left[\frac{d^{2k}}{ds^{2k}}\left(s^2-1\right)^k\right]^2 ds$$

$$=\left(-1\right)^k \int_{-1}^{1}\left(s^2-1\right)^k \frac{d^{2k}}{ds^{2k}}\left(s^2-1\right)^k ds$$

$$\left(2k\right)!\int_{-1}^{1}\left(s^2-1\right)^k ds=\left(2k\right)!\int_{-1}^{1}\sin\theta^k d\theta$$

$$=\frac{\left(2k\right)!2^{2k+1}}{\left(2k+1\right)\binom{2k}{k}}=\frac{2^{2k+1}\left(k!\right)^2}{\left(2k+1\right)}$$

$$\therefore \left(2^k k!\right)^2 \int_{-1}^{1} p_k^2\left(s\right)ds=\frac{2^{2k+1}\left(k!\right)^2}{\left(2k+1\right)}$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} p_k^2\left(s\right)d=\frac{2}{2k+1}$$

تمارين

(1) برهن أن حل معادلة لاقوري

xy`` + (1-x)y` +py = 0

$$y = L_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n p! x^n}{(p-n)!(n!)^2}$$

[5]$_2$ برهن الدالة المولدة لكثيرة حدود لاقوري

$$\frac{e^{\frac{-xt}{(1-t)}}}{1-t} = \sum L_n(x) t^n$$

استنبط كثيرة حدود لاقوري

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$$

برهن علاقة تعامد كثيرة حدود لاقوري

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

(2) باستخدام فرض فربنيوس برهن حل معادلة لاقوري المصاحبة في مثال 8

xy``+ (m+1-x)y` + ny = 0 … (1)

برهن أن الدالة المولدة

$$(-t)^x \frac{e^{\frac{-xt}{(1-t)}}}{(1-t)^{x+1}} = \sum_{k=p} t^k L_p^k(x)$$

[5]$_4$ برهن علاقة التعامد

$$\int_0^\infty x^k e^{-x} L_n^k L_m^k \, dx = \begin{cases} \dfrac{(n+k)!}{k!} & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

(3) برهن أن

$$\int_0^1 p_k(s)\, ds = p_k`(0)/k(k+1)$$

حيث $p_k(s)$ كثيرة حدود ليجندر ثم وضح أن

$p_k(0)=0$ K فردي

$p_k`(0)=0$ K زوجي

(4) برهن علاقة التعامد لدوال ليجندر المصاحبة [4]$_2$

$$\int_0^1 p_{j,m}(s)\, p_{k,m}(s) ds = \begin{cases} \dfrac{2(k+m)!}{(2k+1)(k-m)} & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

الباب الرابع
أنظمة المعادلات التفاضلية الأولية

المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية

$$x`` + x = 0 \ldots (1)$$

يمكن صياغتها على شكل منظومة ثنائية من المعادلات التفاضلية الأولية

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x' \end{cases} \quad \ldots(2)$$

وبصورة عامة فإن المعادلة الخطية النونية تكتب :-

$$f(t, x , x` , x`` , \ldots , x^{(n)})$$

يمكن أن تصاغ على النحو الآتي

$$x_1` = x_2$$

$$x_2` = x_3$$

.

.

$$x_{n-1}` = x_n$$

$$x_n` = g(t , x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$$

طريقة الحذف

لسهولة شرح الطريقة سنتطرق للنظام المتجانس الثنائي ذو المعاملات الثابتة

$x' = a_{11}x + a_{12}y$

$y' = a_{21}x + a_{22}y$

مثال (1)

لحل النظام

$x' = x + y \quad \dots \text{(i)}$

$y' = x - y \quad \dots \text{(ii)}$

نفاضل المعادلة الأولى لنحصل على

$x'' = x' + y' = x' + x - y = x' + x - (x' - x)$

$x'' - 2x = 0 ,$

$x(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}$

<u>مثال (2)</u>

لدينا النظام اللامتجانس الثنائي ذو المعاملات الثابتة

$x' = 2x + y + t$

$y' = x + 2y + t^2$

نشتق المعادلة الأولى لنحصل على

$X'' = 2x' + y' + 1 = 2x' + (x + 2y + t^2) + 1$

$= 2x' + x + (2x' - 4x - 2t) + t^2 + 1$

$x'' - 4x' + 3x = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$

$x(t) = c_1e^t + c_2e^{3t} + t^2/3 + 2t/9 + 11/27$

وأيضا لدينا من المعادلة الأولى

$y(t) = x` - 2x - t = c_1e^t + c_2\, 3e^{3t} + 2t/3 + 2/9 - 2c_1e^t - 2c_2e^{3t} - 2t^2/3 - 4t/9 - 22/27 - t.$

$y(t) = -c_1e^t + c_2e^{3t} - 2t^2/3 - 7t/9 - 16/27$

تمارين

استخدم طريقة الحذف لحل أنظمة المعادلات التالية

1) $x` = x + 2y \quad , y` = 3x + 2y$
2) $x` = -4x - y \quad , \; y` = x - 2y$
3) $x` = x + y \quad , \; y` = y \;, x(0)=1 \;, y(o)=0$
4) $x` = 8x - y \quad , \; y` = 4x + 12y$
5) $x` = 3x + 3y + t \;, y` = -x - y + 1$
6) $x` = 2x + y + 3e^{2t} \;, y` = -4x + 2y + te^{2t}$

طريقة المحددات 7[1]

لاحظ أن حل النظام الخطي الثنائي ذو المعاملات الثابتة يبدو شبيها بحل المعادلة الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة و عليه سنخمن أن حل النظام الخطي الثنائي المتجانس هو :-

$$\{x, y\} = \{\alpha e^{\lambda t}, \beta e^{\lambda t}\}$$

نظرية (1)

للنظام الثنائي $\{x_1(t), y_1(t)\}$, $\{x_2(t), y_2(t)\}$ الحلان

$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$

يقال أنهما مستقلان خطياً فقط إذا كان المحدد

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} x_1 & y_2 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

البرهان

ليكن الحلان مستقلان خطياً و لنفرض أولاً أن $W(t) = 0$ فإن

$$x_1 y_2 = x_2 y_1$$
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = c$$
$$x_1 = c x_2$$
$$y_1 = c y_2$$

إذاً الحلان غير مستقلين و هذا تناقض و من ثم فإن $W(t) \neq 0$

إذا كان الحلان غير مستقلين فإنه $W(t) \neq 0$ من الناحية الأخرى لنفرض أنه يوجد ثابتان ليس كلاهما صفرا

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$$

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$$

افرض أن $c_1 \neq 0$ ، لدينا

$$x_1 = cx_2$$
$$y_1 = cy_2$$
$$c = -\frac{c_2}{c_1}$$
$$W = x_1 y_2 - y_1 x_2$$
$$= cx_2 y_2 - cy_2 x_2$$
$$W = 0$$

تناقض ، إذا الحلان مستقلان. أي مجموع خطي للحلين هو أيضاً حل ويصبح الحل العام هو

$$\{c_1x_1+c_2x_2,\ c_1y_1+c_2y_2\}$$

الآن لإيجاد حل النظام

$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$

نوجد أولاً المعادلة المساعدة

$$D = |A - \lambda I_2| = \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21}$$
$$= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \ldots (2)$$

هنالك ثلاث حالات استنادا إلى أن جذرا المعادلة المساعدة حقيقيان مختلفان ، مكرر أو تخيليان.

<u>الحالة الأولى:</u> الجذران حقيقيان مختلفان و لنخمن أن الحل

$$\{x,y\} = \{\alpha e^{\lambda t}, \beta e^{\lambda t}\}$$

ويصبح لدينا الحلان

$\{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \beta_1 e^{\lambda_1 t}\}$, $\{\alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \beta_2 e^{\lambda_2 t}\}$

حيث

$$x` = \alpha\lambda e^{\lambda t} = a_{11}\alpha\, e^{\lambda t} + a_{12}\beta\, e^{\lambda t}$$

$$y` = \beta\lambda\, e^{\lambda t} = a_{21}\alpha\, e^{\lambda t} + a_{22}\beta\, e^{\lambda t}$$

نحصل على النظام الخطي $e^{\lambda t}$و بعد القسمة على

$$(a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta = 0$$

$$\ldots(3)$$

$$a_{21}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta = 0$$

بوضع $\lambda=\lambda_1$ في (3)، نوجد $\{\alpha_1,\beta_1\}$

بوضع $\lambda=\lambda_2$ في (3)، نوجد $\{\alpha_2,\beta_2\}$

$$\{x(t),y(t)\}=\{c_1\,\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\,\alpha_2 e^{\lambda_2 t}, c_1\,\beta_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\,\beta_2 e^{\lambda_2 t}\}$$

<u>مثال (3)</u>

أوجد حل النظام

$$x` = -x + 6y$$
$$y` = x - 2y$$

الحل

$$D = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 6 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (2+\lambda)(1+\lambda) - 6 = 0$$
$$= \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$
$$\lambda_1 = -4; \lambda_2 = 1$$

أولا بوضع $\lambda_1 = -4$ في (3) فإن

$3\alpha_1 + 6\beta_1 = 0$

$\alpha_1 = -2\beta_1$

$\alpha_1 + 2\beta_1 = 0$,

$\{\alpha_1, \beta_1\} = \{-2, 1\}$

ثانيا بوضع $\lambda_2 = 1$ في (3)

$-2\alpha_2 + 6\beta_2 = 0$

$\alpha_2 - 3\beta_2 = 0$

$\{\alpha_2, \beta_2\} = \{3,1\}$

$\{x(t),y(t)\} = \{-2c_1e^{-4t} + 3c_2e^{t}, c_1e^{-4t} + c_2e^{t}\}$

<u>الحالة الثانية جذر حقيقي مكرر:</u> الحل المقترح في هذه الحالة هو الزوج

-

$\{x_1,y_1\} = \{\alpha_1e^{\lambda t}, \beta_1e^{\lambda t}\}$

....(4)

$\{x_2,y_2\} = \{(\alpha_2 + \alpha_3t)e^{\lambda t}, (\beta_2 + \beta_3t)e^{\lambda t}\}$

مثال(4)

$$x' = -4x - y$$

$$y' = x - 2y$$

الحل

$$D = \det\begin{pmatrix} -4-\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4+\lambda)(2+\lambda)+1 = 0$$

$$= \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda_1 = -3; \lambda_2 = -3$$

$$-\alpha_1 - \beta_1 = 0$$

$$\alpha_1 + \beta_1 = 0$$

$$\{\alpha_1 , \beta_1\} = \{1,-1\}$$

$$\{x_1,y_1\} = \{e^{-3t}, -e^{-3t}\}$$

عوض الزوج الثاني من (4) في المعادلة الأولى من المسألة

$$(\alpha_3 - 3\alpha_2 - 3\alpha_3 t)\, e^{-3t} = -4(\alpha_2 + \alpha_3 t)e^{-3t} - (\beta_2 + \beta_3 t)e^{-3t}$$

$$(\beta_3 - 3\beta_2 - 3\beta_3 t)\, e^{-3t} = (\alpha_2 + \alpha_3 t)\, e^{-3t} - 2(\beta_2 + \beta_3 t)e^{-3t}$$

بعد القسمة على e^{-3t} و مقارنة المعاملات

$$\alpha_3 - 3\alpha_2 = -4\alpha_2 - \beta_2$$

$$-3\alpha_3 = -4\alpha_3 - \beta_3$$

$$\beta_3 - 3\beta_2 = \alpha_2 - 2\beta_2$$

$$-3\beta_3 = \alpha_3 - 2\beta_3$$

$$\beta_2 = -2 , \beta_3 = -1 , \alpha_2 = 1 , \alpha_3 = 1$$

$$\{x_2,y_2\} = \{(1+t)\, e^{-3t}, (-2-t)e^{-3t}\}$$

الحلان مستقلان خطيا لأن $W(t) = 1$

<u>الحالة الثالثة: الجذران تخيليان</u>

$\lambda_1 = a + ib$

$\lambda_2 = a - ib \quad , \ b \neq 0$

$$\{x_1,y_1\} = \{\alpha_1 e^{(a+ib)t}, \beta_1 e^{(a+ib)t}\}$$

$$\dots (5)$$

$$\{x_2,y_2\} = \{\alpha_2 e^{(a-ib)t}, \beta_2 e^{(a-ib)t}\}$$

يمكن الحصول على الأعداد المركبة α_3 , α_2 , β_3 , β_2 من معادلة (3)
للحصول على حلول حقيقية ، لتكن

. $\alpha_1 = A_1 + iA_2 \ , \beta_1 = B_1 + iB_2$

$$x(t) = (A_1 + iA_2)\, e^{at}\,(\cos bt + i\sin bt)$$

$$\dots (6)$$

$$y(t) = (B_1 + iB_2)\, e^{at}(\cos bt + i\sin bt)$$

وبعد عملية الضرب ينتج

$$x(t) = e^{at}[(A_1\cos bt - A_2\sin bt) + i(A_1\sin bt + A_2\cos bt)]$$

$$y(t) = e^{at}[(B_1\cos bt - B_2\sin bt) + i(B_1\sin bt + B_2\cos bt)]$$

ويصبح الحلان الحقيقيان هما

$$\{x_1,y_1\} = \{e^{at}(A_1\cos bt - A_2\sin bt), e^{at}(B_1\cos bt - B_2\sin bt)\}$$

$$\dots (7)$$

$$\{x_2,y_2\} = \{e^{at}(A_1\sin bt + A_2\cos bt), e^{at}(B_1\sin bt + B_2\cos bt)\}$$

$$W(t) = e^{2at}(A_1B_2 - A_2B_1) \neq 0 \ \dots (8)$$

لأن لو فرضنا أن $W(t) = 0$. فإن $A_1 B_2 = A_2 B_1$، مما يعني أن $B_2\alpha_1=A_2\beta_1$ الآن لا α_1 و لا β_1 يتلاشى ، لأن لو أحدهما صفر كذلك الآخر . و يصبح حل 7 تافه أيضا و A_2 لا يمكن أن يتلاشى حتى لا يصبح B_2 صفر λ_1 ليست تخيلية في المعادلة الأولى من (3) . بضرب المعادلة الأولى من (3) في A_2 و باستخدام $B_2\ \alpha_1 = A_2\ \beta_1$ و بعد القسمة على α_1 ينتج أن $(a_{11} - \lambda_1)\ A_2 + a_{12}\ B_2 = 0$ و أيضا λ_1 مرة أخرى ليست تخيلية و عليه فإن المحدد $W(t) \neq 0$ و من ثم الحلان مستقلان .

مثال(5)

$$x` = 4x + y \quad \ldots \quad (i)$$

$$y` = -8x + 8y \quad \ldots \quad (ii)$$

$$D = \lambda^2 - 12\lambda + 40 = 0$$

$$.\ \lambda_1 = 6+2i\ ,\ \lambda_2 = 6-2i$$

وبالتعويض في (7) ينتج

$$\{x_1,y_1\} =\{\ e^{6t}(A_1\cos 2t- (1\backslash 2)A_2\sin bt),\ e^{6t}(B_1\cos 2t-3B_2\sin 2t)\}$$

$$\{x_2,y_2\} =\{e^{6t}(A_1\sin 2t+(1\backslash 2)A_2\cos bt),\ e^{6t}(B_1\sin 2t+3B_2\cos 2t)\}$$

بتعويض المعادلة الأولى في المسألة (i) ينتج

$$(2A_1-2A_2 - B_1)\cos 2t - (2A_1+2A_2- B_2)\sin 2t = 0$$

$$(8A_1-2B_1-2B_2)\cos 2t - (8A_2+2B_1-2B_2)\sin 2t = 0$$

بمقارنة المعاملات نحصل على الثوابت

$A_1=1\ ,\ A_2=1/2\ ,\ B_1=1,\ B_2=3.$

تمارين

أوجد حل أنظمة المعادلات التالية بطريقة المحددات

1) $x` = 4x - 3y \quad , \quad y` = 5x - 4y$

2) $x` = -x + y \quad , \quad y` = -5x + 3y$

3) x` = 4x –3y , y` = 8x – 6y

4) x` = x + y , y` = -x + 3y

طريقة المصفوفات[6]$_1$

لحل أنظمة المعادلات الخطية المتجانسة من الرتبة الأولى .

نظام المعادلات الخطي المتجانس

$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$
$$X' = AX$$
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

نظرية(2)

المصفوفة A_{nxn} التي لها متجهات ذاتية

$\varphi_1 , \varphi_2 , \ldots , \varphi_n$ eigenvectors

مصاحبة للقيم الذاتية

$\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_n$ eigenvalues

فإن حل النظام

X` = AX

يعطى بالعلاقة

$$X(t) = b_1\varphi_1 e^{\lambda_1 t} + b_2\varphi_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + b_n\varphi_n e^{\lambda_n t}$$

مثال(6)

$$\begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$|\lambda I_2 - A| = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -2 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-4)+2=0$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 3$$

$$(i):(2I_2 - A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & :0 \\ -2 & -2 & :0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & :0 \\ 0 & 0 & :0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 0; \therefore x_1 = -x_2 = -a$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix} = -a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \therefore \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(ii):(3I_2 - A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & :0 \\ -2 & -1 & :0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & :0 \\ 0 & 0 & :0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore 2x_1 + x_2 = 0; \therefore 2x_1 = -x_2 = -a$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a/2 \\ a \end{pmatrix} = -a/2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \therefore \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\phi(t) = b_1\phi_1(t) + b_2\phi_2(t) = b_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t} + b_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{3t}$$

ومن الشرط الابتدائي

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & :0 \\ -b_1 & -2b_2 & :1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & :0 \\ 0 & -b_2 & :1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore b_2 = -1; \therefore b_1 = 1$$

$$\therefore \phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{3t} \\ -e^{2t} & 2e^{3t} \end{pmatrix}$$

<u>مثال (7)</u>

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -14 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\left|\lambda I_3 - A\right| = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -8 & -14 & \lambda - 7 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 ,\quad \lambda_2 = 2 ,\quad \lambda_3 = 4$$

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = b_1\, \varphi_1 e^{t} + b_2\, \varphi_2\, e^{2t} + b_3\, \varphi_3\, e^{4t}$$

الحالة الثانية القيم الذاتية مكررة

مثال(8)

$x` = 3x - 18y$

$y` = 2x - 9y$

$$|\lambda I_2 - A| = \det\begin{pmatrix} \lambda-3 & 18 \\ -2 & \lambda+9 \end{pmatrix}$$
$$= (\lambda-3)(\lambda-3) = 0$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3$$

$$(-3I_2 - A) = \begin{pmatrix} -6 & -18 & :0 \\ -2 & 6 & :0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & :0 \\ 0 & 0 & :0 \end{pmatrix}$$
$$\therefore \phi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

φ_2 نوجدها من خلال العلاقة

$$(A - \lambda I_2)\, \varphi_2 = \varphi_1$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -18 & :a_1 \\ 2 & -6 & :a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & :a_1 \\ 0 & -0 & :a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1/2 + a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = b_1 \varphi_1 e^{\lambda t} + b_2 (\varphi_2 + \varphi_1 t) e^{\lambda t}$$

$$\varphi(t) = b_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} + b_2 \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t \right) e^{-3t}$$

<u>الحالة الثالثة :</u> القيم الذاتية تخيلية مترافقة

<u>مثال (9)</u>

x\` = 6x – y ...(i)

y\` = 5x + 4y ...(ii)

$$|\lambda I_2 - A| = \det \begin{pmatrix} \lambda - 6 & 1 \\ -5 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$$

$$\lambda_1 = 5 + 2i ; \lambda_2 = 5 - 2i$$

$$(i) : (\lambda_1 I_2 - A) = \begin{pmatrix} -1+2i & 1 & :0 \\ -5 & 1+2i & :0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1+2i & 1 & :0 \\ 0 & 0 & :0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{1-2i} \\ a \end{pmatrix} = \frac{a}{1-2i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$$

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$$

$$(i):(\lambda_2 I_2 - A) = \begin{pmatrix} -1-2i & 1 & :0 \\ -5 & 1-2i & :0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1-2i & 1 & :0 \\ 0 & 0 & :0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{1+2i} \\ a \end{pmatrix} = \frac{a}{1+2i}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = b_1\varphi_1 e^{\lambda_1 t} + b_2\varphi_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\varphi(t) = b_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{-(5+2i)t} + b_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}$$

للحصول على حلول حقيقية ، نعمل كالآتي :

$$e^{(5+2i)t} = e^{5t}(\cos 2t + i\sin 2t)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{5t}\sin 2t + \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} e^{5t}\cos 2t$$

$$x = c_1 e^{5t}\sin 2t + c_3 e^{5t}\cos 2t$$

$$y = c_2 e^{5t}\sin 2t + c_4 e^{5t}\cos 2t$$

عوِّض هاتان القيمتان في المعادلة الأولى في المسألة ثم قارن بين المعاملات:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} \sin 2t - \frac{1}{2}\cos 2t \\ -\frac{5}{2}\cos 2t \end{pmatrix} e^{5t} + c_2\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos 2t \\ \sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t \end{pmatrix} e^{5t}$$

$[2]_5$

<u>طريقة تغيير الثوابت:</u>

لحل الأنظمة غير المتجانسة وهي شبيهة بطريقة تغيير الثوابت التي درسناها في معادلات الرتبة الثانية. لنفرض أن حل نظام المعادلات المتجانس

$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$

$$(1)$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$

is

$$x = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$(2)$$

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

نظام المعادلات غير المتجانس

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + f_1(x)$$

$$(3)$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + f_2(x)$$

لإيجاد الحل الجزئي

$$put \quad c_1 = u_1(t), \quad c_2 = u_2(t)$$

$$x_p = u_1x_1 + u_2x_2$$

$$(4)$$

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & x_2 \\ f_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & f_1 \\ y_2 & f_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}} \qquad (5)$$

<u>مثال (9)</u>

x` = y + 1

y` = - x + cott

أولا نحل النظام المتجانس

x` = y

y` = -x

$$\left|\lambda I_2 - A\right| = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$= \lambda^2 + 1 = 0$$
$$\lambda = \pm i$$

$$(i):(\lambda_1 I_2 - A) = \begin{pmatrix} i & -1 & :0 \\ 1 & i & :0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} i & -1 & :0 \\ 0 & 0 & :0 \end{pmatrix}$$

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$(ii):(\lambda_2 I_2 - A) = \begin{pmatrix} -i & -1 & :0 \\ 1 & i & :0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -i & -1 & :0 \\ 0 & 0 & :0 \end{pmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = b_1 \varphi_1 e^{\lambda t} + b_2 \varphi_2 e^{\lambda t}$$

$$\varphi(t) = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-it}$$

لإيجاد حلول حقيقية و بما أن

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{5t} \sin 2t + \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} e^{5t} \cos 2t$$

بالتعويض في المعادلة الأولى في المسألة عن قيمتي

$x = c_1 \sin t + c_3 \cos t$

$y = c_2 \sin t + c_4 \cos t$

$x` = y$

$c_1 \cos t - c_3 \sin t = c_2 \sin t + c_4 \cos t$

$c_1 = c_4$, $c_3 = - c_2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} \cos t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$f_1 = 1$, $f_2 = \cot.t$

$$u_1' = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -\cos t \\ \cot t & \sin t \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}} = co\sec t$$

$$u_1 = -\ln\left|\cos ect + \cot t\right|$$

$$u_2' = \frac{\det\begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ \cos t & \cot t \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}}$$

$$= \sin t.\cot t - -\cos t = 0$$

$$\therefore u_2 = c$$

$x_p = u_1\, x_1 + u_2\, x_2 = \sin t \ln \left| \text{cosect} - \cot t \right| - c \cos t$

$y_p = u_1\, y_1 + u_2\, y_2 = \cos t \ln \left| \text{cosect} - \cot t \right| + c \sin t$

$X = X_c + X_p$

تمارين

أوجد حل الأنظمة الآتية

$$1)\ X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -14 & 7 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2)\ X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} X$$

$$3)\ X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} X$$

4) $x` = 2x - y + e^{2t} \sin 2t$

$y` = 4x + 2y + 2e^{2t} \cos 2t$

5) $x` = 3x - 3y + 4$

$y` = 2x - 2y - 1$

الباب الخامس

متسلسلة فورير[1][9]

Fourier Series

تعريف (1)

يعرف الضرب الداخلي للدالتين

$$f(x), g(x) \in c_p(a,b)$$

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad a < x < b.$$

تعريف (2)

تعرف دالة البعد norm function

$$\|f\| = (f,f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f-g\| = \left(\int_a^b (f(x)-g(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

تعريف (3) التعامد orthogonality

يقال أن الدالتين متعامدتان إذا كان الضرب الداخلي لهما صفر

$$f(x), g(x) \in c_p(a,b)$$

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0, \quad a < x < b.$$

تعريف (4) :- الدالة المعيارية normalized function

يقال أن الدالة معيارية إذا كان

$$\|f\| = 1, \qquad a < x < b.$$

تعريف (5) :- التعامد المعياري orthonormal

تكون فئة من الدوال $\{\psi_n(x)\}$ متعامدة على الفترة $a < x < b$ إذا كان

$$(\phi_m, \phi_n) = 0, \qquad m \neq n$$

ويمكن معايرة الفئة المتعامدة $\{\psi_n(x)\}$ لتصبح الفئة المتعامدة معياريا

$$\Phi(x) = \frac{\psi(x)}{\|\psi(x)\|}; \|\psi(x)\| \neq 0$$

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m . \phi_n dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ 1 & , m = n \end{cases}$$

مثال (1)

$\{\psi_n(x)\} = \{\sin nx\}$, $n=1,2,3,\dots$, $0 < x < \pi$

$$(\psi_m, \psi_n) = \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \, dx$$

$if\ ,n \neq m$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{(m-n)}-\frac{\sin(m+n)x}{(m+n)}\right]_0^{\pi}=0$$

$if\ ,n = m$

$$\int_0^{\pi}\sin^2 nx dx =\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx =\frac{\pi}{2}$$

$$(\psi_m,\psi_n)=\begin{cases}0 & ,m\neq n\\ \dfrac{\pi}{2} & ,m=n\end{cases}$$

$$\|\psi_n\|=(\psi_n,\psi_n)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\phi_n =\frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$$

$$(\phi_m,\phi_n)=\begin{cases}0 & ,m\neq n\\ 1 & ,m=n\end{cases}$$

متسلسلة فورير لجيب التمام

لتكن فئة الدوال المتعامدة معياريا

$\varphi_n(x)$, $n=1,2,3,\ldots$, $f \in c_p(a,b)$

تقريبا يمكن التعبير عن الدالة $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, \varphi_n(x) \ , \ a< x < b \ \ldots(1)$$

للبحث عن c_n يستحسن إستبدال m ب n

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \varphi_m (x)$$

$$\int_a^b f(x)\varphi_n (x)dx = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_a^b \varphi_n \varphi_m (x) \, dx$$

$$(f, \varphi_n) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(\varphi_m, \varphi_n)(x) \ldots (3)$$

$$(f, \varphi_n) = c_n$$

<u>مثال(2)</u>

لتكن لدينا فئة الدوال المتعامدة معياريا

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \; \varphi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx \; , 0 < x < \pi \; , n=1,2,3,\ldots$$

$$f(x) = c_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx \; , \; f(x) \in c_p(0,\pi)$$

$$c_0 = (f,\varphi_0) = \int_a^b f(x)\varphi_0(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(x)dx$$

$$c_n = (f,\varphi_n) = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

وبوضع

$$\frac{a_\circ}{2} = c_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \; a_n = c_n \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

نكون قد وصلنا لمتسلسلة فورير لجيب التمام

$$f(x) = \frac{a_\circ}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \;, \; a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$$

<u>مثال(3)</u>

أوجد متسلسلة فورير لجيب التمام للدالة

$$f(x) = \sin x \;,\; 0 < x < \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin(1+n)x + \sin(1-n)x]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(1+n)}{(1+n)} - \frac{\cos(1-n)x}{(1-n)}\right]_0^{\pi}, \quad n \neq 1$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\left[1+(-1)^n\right]}{\left[1-n^2\right]}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi}$$

$$\sin x = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\left[1+(-1)^n\right]}{\left[1-n^2\right]} \cos nx$$

متسلسلة فورير للجيب[10]$_1$

لدينا الدوال المتعامدة معياريا

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \quad , 0 < x < \pi \text{ , } n=1,2,3,\ldots$$

متسلسلة فورير التي تطابق الدالة

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad , \quad f(x) \in c_p(0,\pi)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$$

$$c_n = (f,\varphi_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad , \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx$$

<u>مثال(4)</u>

أوجد متسلسلة فورير للجيب للدالة

$$f(x) = x \,,\ \ 0 < x < \pi$$

الحل:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\,[-x\cos nx/n+\sin nx/n^2]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$.f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \quad , \quad 0< x < \pi$$

<u>متسلسلة فورير العامة</u>

لدينا فئة الدوال المتعامدة معياريا

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,\ \varphi_{2n-1} = \cos nx\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,,\ \varphi_{2n} = \sin nx\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$f(x) \in c_p\,(-\pi\,,\pi) \quad , \quad n=1,2,3,\ldots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x) = c_\circ\phi_\circ + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_{2n-1}\phi_{2n-1} + c_{2n}\phi_{2n}\right]$$

$$= \frac{c_\circ}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_{2n-1}\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + c_{2n}\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right]$$

$$c_0 = (f,\varphi_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$c_{2n-1} = (f,\varphi_{2n-1}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$c_{2n} = (f,\varphi_{2n}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

وإذا وضعنا

$$a_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, c_0 \, , \; a_n = c_{2n-1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \, , \; b_n = c_{2n} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

<u>مثال(5)</u>

أوجد متسلسلة فورير التي تطابق الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

الحل:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} 0 \cos nx \, dx + \int_{0}^{\pi} x \cos nx \, dx \right)$$

$$= 0 + \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0 \sin nx\,dx + \int_0^{\pi} x \sin nx\,dx\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$f(x) = \frac{a_\circ}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx\right]$$

<u>تمارين</u>

١)

برهن أن $0< x <\pi$, cosnx فئة متعامدة ثم أوجد الفئة المتعامدة معياريا لها

٢)

أ) برهن أن الدوال $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$ تشكل فئة معيارية على $(-\pi,\pi)$

(ب) برهن أن الدوال

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ ,\ \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\ ,\ -\pi < x < \pi\ ,\ n=1,2,3,\ldots.$$

تشكل فئة متعامدة معياريا

٣)

برهن أن فئة الدوال $\{\varphi_n\}$ المكونة من

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ ,\ \varphi_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\ ,\ \varphi_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx.$$

متعامدة معياريا على الفترة $-\pi < x < \pi$

4) أوجد متسلسلة فورير العامة للدوال

$$1)\, f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$2)\, f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$3)\, f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

الباب السادس

المعادلات التفاضلية الجزئية

المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية العامة من الرتبة الثانية تكتب

$$aw_{xx} + 2bw_{xy}+cw_{yy}+kw_{x}+mw_{y}+nw = f(x,y)$$

و تصنف على إنها، زائدية إذا كان

$$b^2 – ac > 0$$

بيضاوية إذا كان

$$b^2 – ac < 0$$

قطع مكافئ إذا كان

$$b^2 – ac = 0$$

المعادلة التفاضلية الجزئية شبيهة بالمعادلة من الدرجة الثانية في x,y تختزل إلى إحدى الصور القياسية التالية عن طريق تدوير المحاور بزاوية ظلها

$$\tan 2\varphi= 2b/(a-c)$$

1) معادلة الحرارة-قطع مكافئ- $u_{xx} – u_{y} = 0$

2) معادلة الموجة – قطع زائد – $u_{xx} – u_{yy} = 0$

3) معادلة لابلاس – قطع بيضاوي – $u_{xx} + u_{yy} =0$

معادلة الحرارة:-Heat Equation [4]$_3$

تنص قوانين الديناميكا الحرارية على أن : ((معدل التغير في درجة الحرارة عند النقطة x_i تتناسب مع الفرق ما بين الحرارة عند x_i و متوسط الحرارة عند النقطتين المجاورتين لها x_{i+1},x_{i-1})) ، بعبارة أخرى

$$u_t (x_i , t) = k\{\frac{1}{2} [u(x_{i+1},t)+u(x_{i-1},t)] - u(x_i,t)\}$$

النقاط متساوية الأبعاد $x_1 < x_2 < \dots < x_N$

بتطبيق نظرية تايلور

$$u(x_{i+1},t)-u(x_i,t) = (x_{i+1}-x_i)u_x + \frac{1}{2} (x_{i+1}-x_i)^2 u_{xx}$$

$$u(x_{i-1},t)-u(x_i-t) = (x_{i-1}- x_i)u_x + \frac{1}{2} (x_{i-1}-x_i)^2 u_{xx}$$

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$

$$u_t(x_i , t)= \frac{1}{2} k\{[u(x_{i+1},t)-u(x_i,t)]+[u(x_{i-1},t)-u(x_i,t)]\}$$

$$= \frac{1}{2} k[\Delta x\ u_x + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 u_{xx} - \Delta x\ u_x + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 u_{xx}]$$

$$.u_t(x_i,t) = \frac{1}{2} k(\Delta x)^2.u_{xx} = \frac{1}{2}\ k\ (\Delta x)^2 u_{xx}$$

$u_t = K\, u_{xx}$

وهي معادلة الحرارة في بعد واحد . حيث $K = (k/2)(\Delta x)^2$

يسمى معامل الإنتشار للمادة . في حين أن معادلة الحرارة في بعدين

$u_t = K(u_{xx} + u_{yy})$

وفي ثلاثة أبعاد

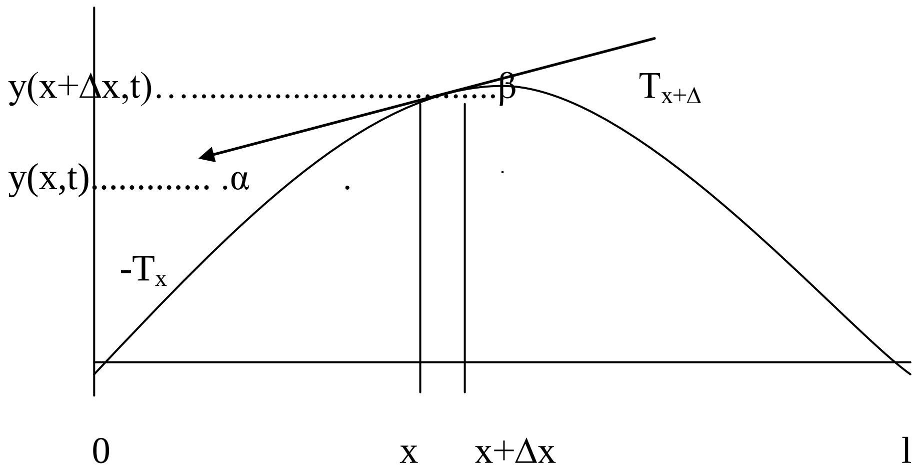
$u_t = K(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$

وإذا كان النظام في حالة الوضع المستقر حيث لا تتغير الحرارة بالنسبة للزمن نحصل على معادلة لابلاس في بعد ، بعدين وثلاثة أبعاد على التوالي :

$U_{xx} = 0$, $U_{xx} + U_{yy} = 0$, $U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0$

معادلة الموجة Wave Equation**:-**[11]₁

الوتر المهتز: وتر مشدود بإحكام بين نقطتين ثابتتين كما هو مبين في الرسم



إذا سحب الوتر ثم أطلق عند زمن $t = 0$ نحن بصدد تحديد الإزاحة $y(x,t)$ لوصلة طولها Δx ومن قانون نيوتن الثاني

$$F = ma = (m\Delta x)y_{tt} \ldots (1)$$

سنفترض في معادلة الحركة أن الوتر يتحرك رأسيا فقط. T_x و $T_{x+\Delta x}$ هما متجها الشد على حدي الوصلة $(x, x+\Delta x)$ و بما إنه لا توجد حركة على المحور السيني فإن إحداثي الشد متطابقان

$$T_{x+\Delta x}\cos\beta = T_x\cos\alpha = T \ldots (2)$$

بصورة مشابهة فإن الفرق في إحداثي الشد يجب أن يساوي القوة الكلية المؤثرة على الوتر ومن معادلة الحركة (1) فإن

$$T_{x+\Delta x}\sin\beta - T_x\sin\alpha = m(\Delta x)y_{tt} \ldots (3)$$

بقسمة كل حد من (3) على ما يناظره في (2) نحصل على

$$\frac{T_{x+\Delta x}\sin\beta}{T_{x+\Delta x}\cos\beta} - \frac{T_x\sin\beta}{T_x\cos\beta} = \frac{m}{T}(\Delta x)y_{tt}$$

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{m}{T}\Delta x\, y_{tt} \ldots (4)$$

$$\tan\alpha = y_x\big|_x \quad , \quad . \tan\beta = y_x\big|_{x+\Delta x}$$

$$\tan\beta = y_x(x+\Delta x,t)\ , \ \tan\alpha = y_x(x,t)$$

ويمكن إعادة كتابة (4) على النحو التالي

$$\frac{1}{\Delta x}\,[y_x(x+\Delta x,t) - y_x(x,t)] = \frac{m}{T}\,y_{tt}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\,[y_x(x+\Delta x,t) - y_x(x,t)] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{m}{T}\,y_{tt}$$

$$y_{xx} = \frac{m}{T}\,y_{tt}$$

وبوضع $c^2 = \frac{T}{m}$ نحصل على معادلة الموجة في بعد واحد

$$y_{tt} = c^2\,y_{xx}$$

في حين أن معادلة الموجة في بعدين :

$$u_{tt} = c^2\,(u_{xx} + u_{yy})$$

معادلة الموجة في ثلاثة أبعاد :

$$u_{tt} = c^2\,(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).$$

<u>مثال (6)</u>

أوجد حل

$$y_{tt}(x,y) = a^2 y_{xx}(x,t)\ \ldots(1)$$

وفق الشروط الحدية

$$y(x,0) = f(x)\quad,\quad y_t(x,0) = 0\ \ldots\ (2)$$

الحل : ضع

$$u\ x+at \quad , \quad v = x-at \quad \ldots (3)$$

$$y_t = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} \ldots (4)$$

$$y_{tt} = a\frac{\partial y_t}{\partial u} - a\frac{\partial y_t}{\partial v}$$

$$y_{tt} = a^2\left(y_{uu} - 2y_{uv} + y_{vv}\right) \ldots (5)$$

وبصورة مشابهة فإن

$$y_{xx} = y_{uu} + 2\,y_{uv} + y_{vv} \ldots \ (6)$$

$$y_{uv} = y_{vu}$$

وباستخدام (5),(6) في (1)

$$y_{uv} = 0 \ldots (7)$$

$$y_u = \varphi`(u) \quad , \quad y = \varphi(u) + \psi(v)$$

$$y = \varphi(x+at) + \psi(x-at) \ldots (8)$$

وباستخدام الشروط الحدية

$$y(x,0) = f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \quad \ldots (i)$$

$$y_t(x,0) = 0 = a\,\varphi`(x) - a\psi`(x)$$

$$\varphi(x) - \psi(x) = c \ldots (ii)$$

وبجمع i و ii

$$2\varphi(x) = f(x) + c$$

وبطرح i – ii

$$2\psi(x) = f(x) - c$$

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\,[f(x+at) + f(x - at)]$$

<u>مسألة الحرارة </u>$[11]_2$

1) $u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) \quad , \quad 0 < x < c \; , \quad t > 0$

2) $u_x(0,t) = 0 \; , \quad u_x(c,t) = 0 \; , \quad t > 0$

3) $u(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 < x < c$

الحل :-

سنبحث عن الحل المنفصل على الصورة

$$.u = X(x)\,T(t) \quad , \quad X \neq 0 \; , \; T \neq 0$$

$$X(x)\,T`(t) = k\,X``(x)\,T(t)$$

$$\therefore \frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X'(x)}{X(x)} = -\lambda$$

لا يمكن أن يتساوى طرفا المعادلة إلا إذا كانا يساويا مقدار ثابت . حيث نحصل على المعادلتين

4) $X``(x) + \lambda X(x) = 0$

$T(t)X`(0) = 0 \; , \; X`(0) = 0$

$T(t)X`(c) = 0 , X`(c) = 0$

5) $T`(t) + \lambda kT(t) = 0$

للحصول على حلول حقيقية للمسألة (4) يجب أن تأخذ λ قيم حقيقية ولدينا الاحتمالات التالية

(i) $\lambda = 0$

$X``(x) = 0$

$X(x) = Ax+B$

$X`(0) = 0 , X(c) = 0$

$A = 0$

$X_0(x) = B = 1/2 \quad ... \ (6)$

(ii) $\lambda > 0 \quad , \quad \lambda = \alpha^2 \ (\alpha > 0)$

$X``(x) + \alpha^2 X(x) = 0$

$X(x) = c_1 \cos\alpha x + c_2 \sin\alpha x$

$X`(x) = - c_1 \alpha \sin\alpha x + c_2 \alpha \cos\alpha x$

ومن الشروط الحدية

$X`(0) = 0$

$c_2 = 0$

$X`(c) = 0$, $c_1 \alpha \sin\alpha c = 0 =$

$\alpha = \frac{n\pi}{c}$, $c_1 \neq 0$ …(7)

$X(x) = \frac{\cos n\pi x}{c}$ ...(8)

(iii) $\lambda < 0$, $\lambda = -\alpha^2$ $(\alpha > 0)$

$X``(x) - \alpha^2 X(x) = 0$

$X(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$

$X`(x) = c_1 \alpha e^{\alpha x} - c_2 \alpha e^{-\alpha x}$

$X`(0) = 0$

$c_2 = c_1$

$X(x) = c_1(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) = 2 c_1 \cosh\alpha x$

$X`(c) = 0$

$c_1 \sinh\alpha c = 0$

$0 < x < c$

$\sinh\alpha c = \frac{1}{2}(e^{\alpha c} - e^{-\alpha c}) \neq 0$

$c_1 = 0$, $X(x) = 0$, $\lambda < 0$ ... (9)

عودة للمعادلة التفاضلية (5)

$$T`(t) + \lambda k T(t) = 0$$

وحلها

$$T(t) = e^{-\lambda kt}$$

$$\lambda = 0$$

$$T_0 (t) = 1$$

$$\lambda = \alpha^2$$

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{c})^2 \quad , \quad n = 1,2,3,...$$

$$T_n(t) = e^{-(n\pi/c)^2 kt} \quad ... \quad (10)$$

$$u_0(x,t) = X_0(x)T_0(t) = \frac{1}{2} \quad ... \ (11)$$

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \cos\frac{n\pi x}{c} e^{-\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 kt} \ e^{-(n\pi/c)^2 kt} \quad ... \ (12)$$

ومن متسلسلة فورير

$$u(x,t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n\pi x}{c} e^{-\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 kt} \cos\frac{n\pi x}{c}$$

ومن الشرط الحدي (3)

$$u(x,0) = f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{c}$$

$$a_n = \frac{2}{c}\int_0^c f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx \quad , \ n = 0,1,2,3,...$$

مثال(7)

في مسألة الحرارة السابقة ، ضع

$c = 1$, $f(x) = x$, $0 \le x \le 1$

$$a_0 = 2\int_0^1 x\,dx = 1$$

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx = 2\,\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

$$.u(x,t) = \frac{1}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\,\frac{n\pi x}{c}\, e^{-\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 kt} \cos n\pi x$$

مسألة الموجة[11]3

1) $y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t)$, $0 < x < c$, $t > 0$

2) $y(0,t) = 0$, $y(c,t) = 0$, $y_t(x,0) = 0$

3) $y(x,0) = f(x)$, $0 \le x \le c$

الحل : سنفترض الحل المنفصل

$.y(x,t) = X(x)T(t)$

4) $X``(x) + \lambda X(x) = 0$, $X(0) = X(c) = 0$

5) $T``(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$, $T`(0) = 0$

لحل معادلة (4)

(i) $\lambda = 0$, $X``(x) = 0$

$X(x) = A(x) + B$

$y(0,t) = 0, B = 0$

$X_0(x) = 0$

$y(c,t) = 0, A = 0$

(ii) $\lambda > 0$, $\lambda = \alpha^2$

$X(x) = c_1\cos\alpha x + c_2\sin\alpha x$

$X(0) = c_1\cos\alpha x = 0$, $c_1 = 0$

$X(c) = c_2\sin\alpha c = 0$, $\alpha = \frac{n\pi}{c}$, $c_2 \neq 0$ …(6)

$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{c}$ … (7)

(iii) $\lambda < 0$, $\lambda = -\alpha^2$

$X(x) = c_1e^{\alpha x} + c_2e^{-\alpha x}$

$X(0) = c_1 + c_2=0$, $c_1 = - c_2$

$$X(c) = 2\, c_1 \sinh\alpha c = 0$$

$$c_1 = 0 \quad , \quad X(x) = 0$$

لحل معادلة (5) و لقيم

$$\lambda_n = \alpha^2 = \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2$$

$$T``(t) + \left(\frac{n\pi at}{c}\right)^2 T(t) = 0 \quad , \quad T`(0) = 0$$

$$T(t) = c_1 \cos\frac{n\pi at}{c} + c_2 \sin\frac{n\pi at}{c}$$

$$T`(0) = 0 \, , \, c_2 = 0$$

$$T_n(t) = \cos\frac{n\pi at}{c}$$

$$y_n = X_n(x)T_n(t) = \sin\frac{n\pi x}{c} \cos\frac{n\pi at}{c}$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{c} \cos\frac{n\pi at}{c}$$

$$y(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{c}$$

$$b_n = \frac{2}{c}\int_0^c f(x) \sin\frac{n\pi x}{c}\, dx$$

مثال(8)

في مسألة الموجة السابقة ، ضع

$f(x) = x$ و $c = \pi$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\,dx$$

$$\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$= 2\frac{1}{n}(-1)^{n+1}$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{c}\cos\frac{n\pi a t}{c}$$

مثال (9)

1) $u_t(x,t) = k\,u_{xx}(x,t)\;,\; 0 < x < \pi \;,\; t > 0$

2) $u(0,t) = 0 \;,\; u(\pi,t) = u_0 \;,\; u(x,0) = 0$

الحل :

لا نستطيع مباشرة فصل المتغيرات لوجود شرط حدي لا متجانس

$u(\pi,t) = u_0$

لتجاوز هذا المأزق نكتب

$$u(x,t) = U(x,t) + \varphi(x)$$

وبالتعويض في (1)

$$u_t = k[U_{xx} + \varphi``(x)] \quad \dots (3)$$

لتصبح الشروط

$$U(0,t) + \varphi(0) = 0$$

$$U(\pi,t) + \varphi(\pi) = u_0$$

$$U(x,0) + \varphi(x) = 0$$

ولنفرض الآن أن

$$\varphi``(x) = 0$$

$$\varphi(0) = 0 \quad \dots (4)$$

$$\varphi(\pi) = u_0$$

هذا يؤدي إلى أن

$$\varphi(x) = Ax + B = \frac{u_\circ}{\pi} x$$

$$f(x) = -\frac{u_\circ}{\pi} x$$

وعليه فإن U تحقق

$$U_t = kU_{xx}$$

$$U(0,t) = U(\pi,t) \qquad \ldots (5)$$

$$U(x,0) = -\varphi(x) = f(x)$$

وهي متجانسة و حلها

$$U(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$X(0) = 0 \;,\; X(\pi) = 0$$

$$\lambda_n = n^2 \quad , \quad X_n(x) = \sin nx$$

$$T'(t) + \lambda k T(t) = 0$$

$$T_n(t) = e^{-n^2kt}$$

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n X_n T_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\, e^{-n^2kt}$$

$$U(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

لدينا متسلسلة فورير للجيب للدالة

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{1}{n} (-1)^{n+1} \sin nx$$

$$f(x) = -\varphi(x) = -\frac{u_\circ}{\pi}x = -\frac{u_\circ}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{1}{n} (-1)^{n+1} \sin nx$$

$$b_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{u_\circ}{\pi} 2\frac{1}{n} (-1)^{n+1} \sin^2 nx \, dx =$$

$$\frac{1}{n} (-1)^n \frac{u_\circ}{\pi} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (1-\cos 2nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{n} 2 (-1)^n \frac{u_\circ}{\pi}$$

$$U(x,t) = 2\frac{u_\circ}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n e^{-n^2kt} \sin nx$$

$$u(x,t) = U(x,t) + \varphi(x)$$

$$u(x,t) = 2\frac{u_\circ}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} (1-e^{-n^2kt}) \sin nx$$

<u>مثال (10)</u>

1) $y_{tt}(x,t) = y_{xx} + A \sin wt$

$0 < x < 1 \quad , \quad t > 0$

2) $y(0,t) = 0 \quad , \quad y(1,t) = 0$

3) $y(x,0) = 0 \quad , \quad y_t(x,0) = 0$

الحل

إذا كان $A = 0$ فإن الحل

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$$

وأسوة بطريقة تغيير الثوابت سنبحث عن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin n\pi x \quad \dots \ (4)$$

حيث لدينا من متسلسلة فورير للجيب B_n هي الثوابت التي يتعين تحديدها

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{1-(-1)^n}{\pi n} \sin n\pi x$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} 2A\frac{1-(-1)^n}{\pi n} \sin n\pi x$$

عوض عن A و(4) في (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n''(t)\sin n\pi x = -(n\pi)^2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\sin n\pi x$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} 2A\,\frac{1-(-1)^n}{\pi n}\sin n\pi x \,\sin wt$$

$$B_n''(t) + (n\pi)^2 B_n(t) = 2A\frac{1-(-1)^n}{\pi n} \sin wt \quad \dots \ (5)$$

$$B_n(0) = 0 \ , \ B'_n(0) = 0$$

$B_n(t) = c_1\cos n\pi t + c_2 \sin n\pi t$

إذا كان n عدد طبيعي زوجي فإن $B_n(t) = 0$

بقي فقط أن نبحث عن $B_n(t)$ في حالة n فردي

ضع $w_n = (2n-1)\pi$ لتصبح معادلة (5)

$$B_{2n-1}``(t) + w^2 B_{2n-1}(t) = 4A \frac{1}{w_n} \sin wt$$

$$B_{2n-1}(0) = 0 \ , \ B`_{2n-1}(0) = 0$$

أو بعبارة أخرى

$$Y``(t) + a^2 Y(t) = b \sin wt$$

$$Y(0) = 0 \ , \ Y`(0) = 0$$

وحلها $Y = Y_c + Y_p$

$$Y_c = c_1 \cos at + c_2 \sin at$$

$Y_p = \frac{b}{a^2 - w^2} \sin wt \quad , \quad a \neq w$ - تمرين -

$$Y = c_1 \cos at + c_2 \sin at + \frac{b}{a^2 - w^2} \sin wt$$

$$Y(0) = 0 \ , \ c_1 = 0$$

$$Y`(0) = 0 \ , \ c_2 = \frac{w}{a} \ \frac{b}{a^2 - w^2}$$

$$Y(t) = \frac{b}{a^2 - w^2}\left(\frac{w}{a}\sin at - \sin wt\right)$$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A \sin w_n x}{w_n\left(w^2 - w_n^2\right)} \left[\frac{w}{w_n}\sin w_n t - \sin wt\right]$$

<u>الإحداثيات المستطيلة</u>

The Dirichlet Problem

<u>مثال(11)</u>

لتكن $u(x,y)$ دالة رتيبة داخل مجال مستطيل

$0 \le y \le b$, $0 \le x \le a$ بحيث أن

1) $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$

2) $u(0,y) = 0$, $u(a,y) = 0$, $0 < y < b$

3) $u(x,0) = f(x)$, $u(x,b) = 0$, $0 < x < a$

الحل : سنفترض الحل المنفصل

$u(x,y) = X(x)\, Y(y)$

4) $X'' + \lambda X = 0$

$X(0) = 0$, $X(a) = 0$

5) $Y'' - \lambda Y = 0$

$$Y(b) = 0$$

من مسألة الموجة فإن حل (4)

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad , \quad X_n = \sin\frac{n\pi x}{a} \quad , \quad n = 1,2,3,...$$

وحل (5) هو

$$Y_n(y) = c_1\, e^{(n\pi/a)y} + c_2\, e^{-(n\pi/a)y}$$

$$Y_n(b) = c_1\, e^{(n\pi/a)b} + c_2\, e^{-(n\pi/a)b} = 0$$

$$c_2 = -\, c_1\, e^{2n\pi b/a}$$

$$Y_n(y) = c_1[e^{(n\pi/a)y} - e^{(n\pi/a)(2b-y)}]$$

لنختار

$$c_1 = -\frac{1}{2}\, e^{-n\pi b/a}$$

$$Y_n(y) = \frac{1}{2}\; [e^{(n\pi/a)(b-y)} - e^{-(n\pi/a)(b-y)}]$$

$$= \sinh \frac{1}{a} n\pi(b-y)$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{1}{a} n\pi(b-y) \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{1}{a} n\pi b \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$b_n = B_n \sinh \frac{1}{a} n\pi b = 2.\frac{1}{a} \int_0^a f(x) \sin\frac{n\pi x}{a} dx$$

$$B_n = (1 \backslash a \sinh \frac{1}{a} n\pi b) \int_0^a f(x) \sin\frac{n\pi x}{a} dx$$

تمارين

1) $u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) \quad , \quad 0 < x < \pi \quad , \quad t > 0$

$u(0,t) = 0 \quad , \quad u(\pi,t) = 0 \quad , \quad u(x,0) = \sin x$

برهن أن الحل

$u(x,t) = e^{-kt} \sin x$

2) $y_{tt}(x,t) = y_{xx}(x,t) + A \sin wt \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , t > 0$

$Y(0,t) = 0 \quad , \quad Y(1,t) = 0$

$Y(x,0) = 0 \quad , \quad Y_t(x,0) = 0$

إذا كان $a = w$. في الحل الخاص برهن أن

$$Y(t) = b \frac{1}{a} (\frac{1}{a} \sin at - t \cos at)$$

3) $u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) + q_0 \quad , \quad 0 < x < \pi \quad , \quad t > 0$

$u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = f(x) = 0$

4) $u_t = ku_{xx}$

.$u(0,t) = 0$, $u_x(\pi,t)\ 0$, $u(x,0) = f(x)$

الباب السابع

[11]4اللابلاس في الإحداثيات القطبية

Lablacian in Polar Coordinate

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}$$
$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}$$
$$\nabla^2 u = 0 = \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\theta\theta} = 0$$

مثال (1)

(1) $\rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\theta\theta} = o$

(2) $u(\rho,o) = o \qquad u(\rho,\pi) = o \quad ; 1<\rho<b$

(3) $u(1,\theta) = o \qquad u(b,\theta) = u_o \quad ; o<\theta<\pi$

الحل : ضع $u=R(p)\phi(\theta)$

(4) $\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = o \qquad ;R(1) = o$

(5) $\varphi''(\theta) + \lambda\varphi(\theta) = o \qquad ; \varphi(o) =o ;\varphi(\pi) =o$

وحل معادلة (5) - كما في مسألة الموجة ،الباب السابع، حيث

$c = \pi$ هو :-

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 = n^2 , \quad \varphi_n = \sin n\theta , \; n= 1,2,3,...$$

معادلة (4) هي معادلة كوشي و معادلتها المساعدة

$$r^2 + (a-1)r + b = 0$$

$$r^2 - n^2 = 0$$

$$R(\rho) = c_1\rho^n + c_2\rho^{-n}$$

$$R(1) = 0 , \; c_1 = - c_2$$

$$R = \rho^n - \rho^{-n}$$

$$u(\rho,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n (\rho^n - \rho^{-n}) \sin n\theta$$

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n (b^n - b^{-n}) \sin n\theta$$

وهي متسلسلة فورير للجيب حيث

$$B_n (b^n - b^{-n}) = \frac{2}{\pi} u_\circ \int_0^{\pi} \sin n\theta \, d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi} u_\circ \frac{1-(-1)^n}{n}$$

$$u(\rho,\theta) = \frac{2}{\pi} u_\circ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \frac{\rho^n - \rho^{-n}}{b^n - b^{-n}} \sin n\theta$$

مثال(2) صيغة بواسون التكاملية $[12]_1$

$u(\rho,\theta)$ متصلة و محدودة على $0 < \rho < 1$

1) $\rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\theta\theta} = o \ , \ 0 < \rho < 1 \ ,-\pi < \theta < \pi$

2) $u(1,\theta) = f(\theta) \ , \quad -\pi < \theta < \pi$

3) $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) \ , \quad \varphi`(-\pi) = \varphi`(\pi)$

الحل: ضع

$$u(\rho,\theta) = R(\rho)\ \varphi(\theta)$$

4) $\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = o \ , \ 0 < \rho < 1$

5) $\varphi''(\theta) + \lambda\varphi(\theta) = o$

$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) \ , \quad \varphi`(-\pi) = \varphi`(\pi)$$

وحل معادلة (5)- كما في مسألة الحرارة ،الباب السابع، حيث

$c = \pi$ هو

$$\lambda_0 = 0 \ , \ \lambda_n = (\frac{n\pi}{c})^2 = n^2$$

$$\varphi_0 = 1/2 \quad , \quad \varphi_n = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \ , \ n = 1,2,3,...$$

معادلة (4) هي معادلة كوشي و معادلتها المساعدة

$$r^2 + (a-1)r + b = 0$$

$r^2 - \lambda = 0 , \lambda=0 , r^2=0$

$R_0(\rho) = A\rho^r + B\rho^r \ln\rho$

وبما أن $1 > \rho > 0$ فإن $\ln\rho \to -\infty$ عندما $\rho \to 0$. وبما أن

$u(\rho,\theta) = R(\rho)\, \varphi(\theta)$ محدودة يجب أن $B = 0$ ويبقى

$R_0 = A = 1$

$\lambda = n^2 , r^2 - n^2 = 0$

$R(\rho) = c_1\rho^n + c_2\rho^{-n}$

وأيضا لأن الدالة محدودة يجب أن $c_2 = 0$. لأن

$\rho^{-n} \to -\infty$ عندما $\rho \to 0$ وتصبح $R_n(\rho) = \rho^n$

$$. u(\rho,\theta) = R(\rho)\, \varphi(\theta)= \frac{a_\circ}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\Psi)\cos n\Psi d\Psi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\Psi)\sin n\Psi d\Psi$$

وللوصول إلى صيغة بواسون التكاملية

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\Psi) d\Psi + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \frac{1}{\pi} \cos n\theta \int_{-\pi}^{\pi} f(\Psi)\cos n\Psi d\Psi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \frac{1}{\pi} \sin n\theta \int_{-\pi}^{\pi} f(\Psi)\sin n\Psi d\Psi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Psi)[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n(\cos n\theta\cos n\Psi+\sin n\theta\sin n\Psi)]d\Psi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Psi)[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\theta-\Psi)]d\Psi$$

لكن- تمرين -

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n\theta = \frac{r\cos\theta - r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$$

$$u(\rho,\theta)= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Psi)[\frac{1}{2}+\frac{\rho\cos(\theta-\psi)-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}]d\Psi$$

$$u(\rho,\theta)= \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\psi)d\psi}{1+2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}$$

<u>$_4$[4]اللابلاس في الإحداثيات الأسطوانية</u>

The Laplacian In Cylinderical Coordinates:-

الإحداثيات الأسطوانية هي امتداد للإحداثيات القطبية فقط بإضافة البعد الثالث z

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

وبالتعويض عن قيمة اللابلاس القطبي

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta}$$

نحصل على اللابلاس الأسطواني

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} + u_{zz}$$

<u>مثال(4)</u>

سريان الحرارة في أسطوانة منتهية . إذا كانت الحرارة تسري في الأسطوانة

$0 < z < c \quad , \quad -\pi \le \theta \le \pi \quad , \quad 0 \le \rho < \rho_{max}$

$u_t = k\, \nabla^2 u$

وكحالة خاصة إذا إفترضنا حالة الوضع المستقر أي أن معادلة الحرارة لاتعتمد على الزمن ، نحصل على معادلة لابلاس

$\nabla^2 u = \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\theta\theta} + \rho^2 u_{zz} = o \quad \ldots (1)$

$u(\rho,\theta,0) = 0 \quad , \quad u(\rho,\theta,c) = 0 \qquad \ldots \quad (2)$

لنفرض الحلول المنفصلة

$u(\rho,\theta,z) = R(\rho)\varphi(\theta)Z(z)$

$$\frac{R'' + (1/\rho)R'}{R} + \frac{(1/\rho^2)\varphi''}{\varphi} = -\frac{Z''}{Z'}$$

وباستخدام ثوابت للفصل كالعادة نحصل على

3) $\varphi``(\theta) + \mu\varphi(\theta) = 0$

$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$

$\varphi`(-\pi) = \varphi`(\pi)$

$\varphi(\theta) = A\cos m\theta + B\sin m\theta \quad , \quad \mu = m^2$

4) $Z`` + rZ = 0 \quad , \quad Z(0) = Z(c) = 0$

$Z(z) = \sin(n\pi z/c) \quad , \quad r = (n\pi/c)^2 \; , \; n = 1,2,3,...$

5) $R`` + (1/\rho)R` - [\, r + \mu/\rho^2 \,]R = 0$

$R`` + (1/\rho)R` - [(n\pi/c)^2 + m^2/\rho^2] = 0$

وحلها دالة بسل المحسنة

$R(\rho) = I_m(n\pi\rho\backslash c) \quad , \quad m = 0,1,2,3,...$

. $u(\rho,\theta,z) = I_m(n\pi\rho\backslash c)\,(A\cos m\theta + B\sin m\theta)\,\sin(n\pi z/c)$

مثال(5)

أوجد حل معادلة لابلاس في الأسطوانة المنتهية

$0 < \rho < \rho_{max} \quad , \quad 0 < z < c$

والتي تحقق الشروط

$u(\rho_{max},\theta,z) = 1$

$u(\rho,\theta,0) = 0$

$u(\rho,\theta,c) = 0$

الحل:-

بما إن الشروط الحدية لا تعتمد على θ يكفي أن نضع $m=0$ ويصبح

الحل

$$u(\rho,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_0(n\pi\rho\backslash c)\sin(n\pi z\backslash c)$$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_0(n\pi\rho_{max}\backslash c)\sin(n\pi z\backslash c) \quad ...(i)$$

ولدينا متسلسلة فورير للدالة

$.f(z) = 1 , \quad 0 < z < c$

هي كالآتي

$$1 = \frac{1}{\pi} \sum_{n:odd}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi z/c) \qquad ... (ii)$$

ومن (i) و (ii) نحصل على

$$A_n = \frac{4}{\pi n I_\circ\left(\frac{n\pi\rho_{\max}}{c}\right)}$$

$$u(\rho, z) = \frac{4}{\pi}\sum_{n:odd}^{\infty} \frac{\sin(n\pi z/c)\, I_\circ(n\pi\rho/c)}{n I_\circ\left(\frac{n\pi\rho_{\max}}{c}\right)}$$

5[4] اللابلاس في الإحداثيات الكروية

The Laplacian In Spherical Coordinates:-

$x = \rho \sin\theta \cos\varphi$

$y = \rho \sin\theta \sin\varphi$

$z = \rho \cos\theta$

و لدينا من الإحداثيات القطبية

$u_{xx} + u_{yy} = u_{\rho\rho} + (1/\rho)u_\rho + (1/\rho^2)u_{\varphi\varphi}$ ... (i)

حيث يمكن إيجاد (x,y) من (ρ,φ)

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$

و بصورة مشابهة يمكن إيجاد (z,ρ) من (r,θ)

$\rho = r \sin\theta$, $z = r \cos\theta$

.

$u_{zz} + u_{\rho\rho} = u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta}$ ... (ii)

بإضافة (i) إلى (ii) ينتج

$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}= u_{rr}+(1/r)u_r+(1/r^2)u_{\theta\theta}+(1/\rho)u_\rho +(1/\rho^2)u_{\varphi\varphi}$

لكن

$$u_\rho = u_r \frac{\partial r}{\partial \rho} + u_\theta \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + u_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}$$

التحويل من الإحداثيات الأسطوانية إلى الكروية

$r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$, $\theta = \tan^{-1}(\rho/z)$, $\varphi = \varphi$

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{\rho}{r}, \ldots, \frac{\partial \theta}{\partial \rho} = \frac{\cos\theta}{r}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = 0$$

$$u_\rho = u_r \frac{\rho}{r} + u_\theta \frac{\cos\theta}{r}$$

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} (u_{\theta\theta} + \cot\theta\, u_\theta + \operatorname{cosec}^2\theta\, u_{\varphi\varphi})$$

<u>مثال(5)</u>

إذا فرضنا أن الأرض كرة نصف قطرها c وأن حرارة السطح دالة دورية في الزمن أي أن :

$u_t = k\nabla^2 u$, $0 < t < \infty$, $0 \le x^2+y^2+z^2 < c^2$

$u(x,y,z,t) = u_0(t)$, $0 < t < \infty$, $x^2+y^2+z^2 = c^2$

الحل:-

نستعين بالإحداثيات الكروية و نبحث عن الحل

$u = u(r,t)$

$u_t = k[u_{rr} + (2/r)u_r]\ ,\ \ 0 < t < \infty\ , 0 \leq r < c$

ويمكن أن تختزل هذه المسألة إلى معادلة الحرارة ذات البعد الواحد

باستخدام الدالة الجديدة

$w(r,t) = r\, u(r,t)$

$w_t = r\, u_t$

$w_r = r\, u_r + u$

$w_{rr} = r\, u_{rr} + 2u_r$

وبعد ضرب معادلة الحرارة في r تصبح المسألة

$.w_t = k\, w_{rr}\ \ ,\ t > 0\ ,\ 0 \leq r < c$

$.w(c,t) = c\, u_0(t)\ \ ,\ \ t > 0$

$.w(0,t) = 0\ \ \ \ \ ,\ \ t > 0$

$.w(r,0) = 0\ \ \ ,\ 0 \leq r < c$

وأسوة بمسألة الحرارة ذات الشروط الحدية غير المتجانسة مثال (9)

في الباب السادس

$$w(r,t) = W(r,t) + \varphi(r)$$

$$w_t = k [W_{rr} + \varphi``(r)]$$

$$W(0,t) + \varphi(0) = 0$$

$$W(c,t) + \varphi(c) = c\, u_0$$

$$W(r,0) + \varphi(r) = 0$$

ومن حالة الوضع المستقر فإن

$$.\varphi`` = 0 , \ \varphi(0) = 0 \ , \ \varphi(c) = c\, u_0$$

وتصبح المسألة متجانسة على النحو التالي :-

$$W_t = k\, W_{rr}$$

$$W(0,t) = 0 \quad , \quad W(c,t) = 0$$

$$W(r,t) = R(r)\, T(t)$$

$$(i)\ R``(r) + \lambda R(r) = 0 \quad , \ R(0) = R(c) = 0$$

$$(ii)\ T`(t) + \lambda k\, T(t) = 0$$

$$0 < r < c , \lambda_n = (n\pi/c)^2$$

$$R(r) = \sin(n\pi r/c)$$

$$T(t) = e^{-(n\pi/c)^2 kt}$$

$$W(r,t) = \sum b_n e^{-(n\pi/c)^2 kt} \sin(n\pi r/c)$$

$$\varphi''(r) = 0$$

$$\varphi = Ar + B$$

$$\varphi(r)= u_0\, r$$

$$W(r,0) = - \varphi(r) = - u_0\, r = f(r)$$

ولدينا من مفكوك فورير

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{1}{n}\,(-1)^{n+1} \sin nr$$

$$.b_n = \frac{2}{c}\int_0^c f(r) \sin nr\, dr = 2\frac{u_\circ}{n}\,(-1)^{n+1}$$

$$W(r,t) = \varphi(r) + w(r,t)$$

$$= u_0 \,[r + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{1}{n}\,(-1)^{n+1} \sin nr \;\; e^{-(n\pi/c)^2 kt}$$

$$u(r,t) = \frac{1}{r}\, w(r,t)$$

<u>ملاحظة</u>

باستخدام الإحداثيات الكروية المتماثلة تصبح معادلة الموجة

$$u_{tt} = a^2(u_{rr} +2\, \frac{1}{r} u_r)$$

ثم نحولها إلى معادلة الموجة ذات البعد الواحد باستخدام التحويل

$.w(r,t) = r\, u(r,t)$

لتصبح

$.w_{tt} = a^2\, w_{rr}$

مثال(6)

1) $u_{tt} = a^2\, \nabla^2 u \;,\; 0 \le r < c$

2) $u(r,0) = D \quad , \quad u_t(r,0) = 0$

3) $u(c,t) = 0 \quad , \quad u(0,t) = 0$

تتحول إلى معادلة موجة ذات بعد واحد

4) $w_{tt} = a^2\, w_{rr} \;,\; 0 \le r < c$

5) $w(r,0) = rD \;,\; w_t(r,0) = 0$

6) $w(c,t) = 0 \quad , \quad w(0,t) = 0$

سنفترض الحل المنفصل

$w(r,t) = R(r)\, T(t)$

$R``(r) + \lambda R(r) = 0 \quad , \quad R(0) = R(c) = 0$

$R_n(r) = \sin(n\pi r/c)$

$T``(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad , \quad T`(0) = 0$

$T_n(t) = \cos(n\pi a t/c)$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi r/c)\cos(n\pi at/c)$$

$$b_n = \frac{2}{c}\int_0^c f(r)\sin(n\pi r/c)\,dr$$

$$f(r) = Dr = \frac{2}{\pi} D\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}(-1)^{n+1}\sin(m\pi r/c)$$

$$b_n = D\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}\frac{2}{c}\int_0^c \sin^2(n\pi r/c)\,dr$$

$$b_n = D\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}$$

$$w(r,t) = D\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin(n\pi r/c)\cos(n\pi at/c)$$

$$u(r,t) = \frac{1}{r}w(r,t)$$

مثال(7)

لدينا-اولاً- معادلة الحرارة

$$\nabla^2 u = u_{rr} + 2\frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2}\left(u_{\theta\theta} + \cot\theta u_\theta + \operatorname{cosec}^2\theta u_{\varphi\varphi}\right) = k u_t$$

وبفرض الحلول المنفصلة

$$.u(r,\theta,\varphi,t) = R(r)\Psi(\theta)\Phi(\varphi)T(t) \ldots (1)$$

$$\frac{1}{R}\left[R``(r) + 2\frac{1}{r}R(r)\right] + \frac{1}{r^2\Psi(\theta)}\left[\Psi``(\theta) + \cot\theta\Psi`(\theta)\right]$$

$$+\frac{\cos ec^2\theta.\Phi''(\varphi)}{r^2\Phi(\varphi)} - \frac{T(t)}{kT(t)} = 0\ldots(2)$$

الحدود الثلاثة الأولى لا تعتمد على t في حين يعتمد الحد الأخير على t و من ثم فهو ثابت نسميه λ

$$T`(t) + \lambda k T(t) = 0$$

$$T(t) = e^{-\lambda kt} \ldots (3)$$

بضرب (2) في r^2 نرى أن الحدين الثاني والثالث لا يعتمدان على r

وندخل ثابت الفصل μ-

$$\frac{1}{\Psi(\theta)}\left[\Psi''(\theta) + \cot\theta\Psi'(\theta)\right]\frac{\cos ec^2\theta.\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\mu \qquad (4)$$

بضرب (4) في $\sin^2\theta$ نرى أن الحد $\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$ لا يعتمد على θ

ندخل ثابت الفصل $-\nu$

$$\Phi``(\varphi) + \nu\, \Phi(\varphi) = 0 \ldots (5)$$

$$\Phi(-\pi) = \Phi(\pi) \ , \Phi`(-\pi) = \Phi`(\pi)$$

$$\Phi(\varphi) = A\cos m\varphi + B\sin m\varphi \ , \ \nu=m^2 \ , m=1,2,3,\ldots$$

$$\Psi``(\theta) + \cot\theta\Psi`(\theta)+(\mu - \nu\,\mathrm{cosec}^2\theta)\Psi(\theta) = 0$$

وهي معادلة ليجندر المصاحبة و حلها هو

$$P_{k,m}(\cos\theta) = \sin^m\theta P_k^{(m)}(\cos\theta) \ , \mu=k(k+1)$$

أخيرا ما تبقى من (2) يعتمد فقط على r و نحصل على المعادلة

$$R``(r) + 2\,\frac{1}{r}R`(r) + (\lambda - \frac{1}{r^2}\mu)R(r) = 0$$

وحلها دالة بسل الكروية

$$R(r) = J_k(r) = (\pi/2r)^{1/2}J_{k+1}(r) \quad , \quad \lambda > 0$$

$$R``(r) + 2\frac{1}{r}R` - \frac{1}{r^2}k(k+1)\,R = 0 \quad , \ \lambda = 0$$

وحلها

$$R(r) = r^k$$

ويصبح حل معادلتا الحرارة ولابلاس – داخل الكرة – هما

$$u(r,\theta,\varphi,t)=J_k(r)P_{k,m}(\cos\theta)(A\cos m\varphi+B\sin m\varphi)e^{-\lambda kt} ;\lambda>0$$

$$u(r,\theta,\varphi) =r^kP_{k,m}(\cos\theta)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi) ; \lambda=0$$

لاحظ

$$R(r) = A_1r^k + A_2r^{-(k+1)}$$

و ليكون الحل معرف عند $r=0$ يجب أن يكون $A_2=0$

ثانيا بالنسبة لمعادلة الموجة

$$\nabla^2u = c^2u_{tt}$$

والاختلاف بينها وبين معادلة الموجة ينحصر فقط في أن (3) تصبح

$$T``(t) + c^2\lambda T(t) = 0$$

$$T(t) = C \cos ct\sqrt{\lambda} + D \sin ct\sqrt{\lambda}$$

ليصبح الحل العام هو

$$u(r,\theta,\varphi,t)=J_k(r)P_{k,m}(\cos\theta)(A\cos m\varphi+B\sin m\varphi).$$

$$(C \cos ct\sqrt{\lambda}+D\sin ct\sqrt{\lambda})$$

الشروط الحدية على الكرة

إذا كانت

$$\nabla^2u = 0 \ ; \quad 0 \le r \le a$$

داخل الكرة تحقق الشرط الحدي

$$u(a,\theta) = G(\theta)$$

وبما أن الشرط الحدي لا يعتمد على φ واضح أن $m=0$ و يصبح الحل -
وليكون الحل معرف عند $r=0$ يجب أن يكون $A_2=0$:

$$u(r,\theta) = \sum B_k r^k P_k(\cos\theta)$$

ومن تعامد دوال ليجندر

$$\int_0^{\pi} u(a,\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta d\theta=$$

$$B_k a^k \int_0^{\pi} P_k^2(\cos\theta)\sin\theta d\theta = B_k a^k \frac{2}{2k+1}$$

$$B_k = \frac{2k+1}{2a^k}\int_0^{\pi} G(\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

<u>مثال(8)</u>

أوجد حل معادلة لابلاس على الكرة $0 \le r \le a$ الذي يحقق

$$u(a,\theta) = 1 \quad ; \quad 0 < \theta < \pi/2$$

$$u(a,\theta) = 0 \quad ; \quad \pi/2 < \theta < \pi$$

ثم برهن أن $u(r, \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}$

الحل

$$B_k = \frac{2k+1}{2a^k}\int_0^{\pi} P_k(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$B_k = \frac{2k+1}{2a^k}\,\frac{P_k'(0)}{k(k+1)} \quad , k = 1,2,3,...$$

$$B_0 = \frac{1}{2} \quad ,$$

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2} + \sum (r/a)^k \frac{2k+1}{2a^k}\,\frac{P_k'(0)}{k(k+1)}\, P_k(\cos\theta)$$

لكن k فردي $P_k(0) = 0$

k. زوجي $P_k`(0) = 0$

$$u(r, \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}$$

أحيانا يمكن أن نتحاشى التكامل إذا كانت الدالة $G(\theta)$ يمكن كتابتها كمجموع لكثيرات حدود ليجندر

<u>مثال(9)</u>

أوجد $u(r,\theta)$ حل معادلة لابلاس على الكرة $0\le r \le a$ والتي تحقق

$$u(a,\theta)=1+3\cos\theta+3\cos^2\theta$$

الحل:

$$u(a,\theta)=G(\theta)=2+3\cos\theta+3\cos^2\theta-1$$

$$=2P_0(\cos\theta)+3P_1(\cos\theta)+2P_2(\cos\theta)$$

ويصبح حل معادلة لابلاس

$$u(r,\theta) = 2(r/a)^2P_2(\cos\theta)+3(r/a)P_1(\cos\theta)+2P_0(\cos\theta)$$

<u>الشروط الحدية خارج الكرة</u>

إذا أردنا الحل فقط خارج الكرة فإن تحليل المعادلة القطرية يسمح لنا باختيار حل معادلة بسل الثاني و الذي يصبح لانهائي عندما $r\to 0$

هذه الدالة تكتب

$$R(r) = n_k(r\sqrt{\lambda}) \;\; , \;\; \lambda > 0$$

يمكن أن نختار $R(r) = r^{-(k+1)}$ و تصبح الحلول المنفصلة لمعادلتي الحرارة ولابلاس -$r \neq 0$ – هما

$$u(r,\theta,\varphi,t)=n_k(r\sqrt{\lambda})\, P_{k,m}(\cos\theta)(A\cos m\varphi+B\sin m\varphi)e^{-\lambda kt}$$

$\lambda\neq 0$

$$u(r,\theta,\varphi,t)=r^{-(k+1)}\, P_{k,m}(\cos\theta)(A\cos m\varphi+B\sin m\varphi) \;;\;\; \lambda=0$$

وحلول معادلة الموجة

$$u(r,\theta,\varphi,t)=n_k(r\sqrt{\lambda})\, P_{k,m}(\cos\theta)(A\cos m\varphi+B\sin m\varphi).$$

$$(C \cos ct\sqrt{\lambda} + D \sin ct\sqrt{\lambda})$$

وحل معادلة لابلاس خارج الكرة

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} r^{-(k+1)}P_{k,m}(\cos\theta)(A_{km}\cos m\varphi+B_{km}\sin m\varphi)$$

مثال(10)

أوجد حل معادلة لابلاس خارج الكرة $r = a$ و التي تحقق

$u(a,\theta) = 1 \quad , \quad 0 < \theta < \pi$

$u(a,\theta) = 0 \quad , \pi/2 < \theta < \pi$

الحل : بما أن الشرط الحدي لا يعتمد على φ نأخذ الحلول المنفصلة حيث

-: $m = 0$

$$u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{-(k+1)}P_k(\cos\theta)$$

مفكوك ليجندر للدالة $u(a,\theta)$

$$u(a,\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{2k(k+1)} P_k'(0)\, P_k(\cos\theta)$$

ويصبح الحل المطلوب

$$u(r,\theta) = \frac{a}{2r} + \sum_{k=1}^{\infty} (a/r)^{k+1} \frac{2k+1}{2k(k+1)} P_k'(0)\, P_k(\cos\theta)$$

[13]معادلة شرودنجر الموجية على الإحداثيات الكروية[1]

معادلة الموجة

$$[-\frac{h^2}{2m}\nabla^2 + V(r)\,]u(r) = Eu(r)$$

تكتب وفق الإحداثيات الكروية متماثلة طاقة الجهد

$$-\frac{h^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]u+V(r)u=Eu\ldots(1)$$

نستخدم الحلول المنفصلة للجزئين الزاوي و القطري

$$.u(r,\theta,\varphi) = R(r)\,Y(\theta,\varphi)$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2mr}{h^2}\left[E-V(r)\right]=\frac{-1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right]\ldots(2)$$

ثم نستخدم ثابت الفصل λ لنحصل على المعادلتين

أولاً ، القطرية

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left(\frac{2mr}{h^2}\left[E-V(r)\right]-\frac{\lambda}{r^2}\right)R=0\ldots(3)$$

ثانياً ، الزاوية

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}+\lambda Y\right]=0\ldots(4)$$

المعادلة (4) تُفصل كالآتي $Y(\theta,\varphi) = \psi(\theta)\Phi(\varphi)$ وثابت الفصل ν

5) $\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \nu\Phi = 0$

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} Ae^{i\nu\varphi/2} + B\,e^{-i\nu\varphi/2}, & \nu\neq 0 \\ A + B\varphi, & \nu=0 \end{cases}$$

لكي تكون `Φ و Φ متصلتان خلال $[0,2\pi]$ ذلك يتطلب ان نختار ν :

$\Phi_m(\varphi) = (2\pi)^{-1/2}e^{im\varphi}$ … (6)

وإختيار الثابت $(2\pi)^{-1/2}$ حتى تصبح Φ متعامدة على مدى φ

والمعادلة

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\psi}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)\right]=0...(7)$$

ضع $\nu = m^2$ و $s = \cos\theta$ و $\psi(\theta) = P(s)$

لتصبح (7) معادلة ليجندر المصاحبة $-1 < s < 1$

$$\frac{d}{ds}\left[\left(1-s^2\right)\frac{dP}{ds}\right]+\left[\lambda-\frac{m^2}{1-s^2}\right]P=0...(8)$$

وحلها – $\lambda = k(k+1)$ -

$$P_{k,m}(s) = (1-s^2)^{|m|/2}\,P_k^{(m)}(s)$$

احد الحلان منتهي عند $s = \pm 1$ والآخر لا

لحل المعادلة القطرية ضع $\rho = \alpha r$ حيث

$$\alpha = [2m(V_0 - |E|)/\hbar^2]^{1/2} \quad , \quad r < a$$

لتصبح (3) داخل الكرة $r < a$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left[1 - \frac{k(k+1)}{\rho^2}\right]R = 0 \; = 0$$

وحلها دالة بسل الكروية $J_k(\rho)$ المنتظمة عند $\rho = 0$

$$R(\rho) = J_k(\rho) = (\pi/2\rho)^{1/2} \quad , \quad \lambda > 0$$

و إذا أردنا الحل خارجيا $r > a$ نختار الحل الآخر لمعادلة بسل الذي يكون لانهائي عند $\rho \to 0$ ، أي منتهي عند $1/\rho$

ويصبح الحل دالة نيومان - Neumann- الكروية

$$R(\rho) = n_k(\rho) = (-1)^{k+1}(\pi/2\rho)^{1/2}J_{-(k+1/2)}(\rho) \quad , \quad \lambda > 0$$

الدوال الكروية الرتيبة

المعادلة الزاوية

$$Y(\theta,\varphi) = \psi(\theta)\Phi(\varphi) \quad \ldots \quad (4)$$

والتي فصلناها إلى المعادلتين

(5) و حلها

$$\Phi(\varphi) = e^{im\varphi} \quad , \quad \|\Phi(\varphi)\| = \sqrt{(2\pi)}$$

والمعادلة (6) و حلها

$\psi(\theta) = P_{k,m}(\cos\theta)$

$\| \psi(\theta) \| = \| P_{k,m}(\cos\theta) \| = [2(k+m)!/(2k+1)(k-m)!]^{1/2}$

ونحصل على تعامد $Y(\theta,\varphi)$

$y(\theta,\varphi) = Y(\theta,\varphi) \backslash \| Y(\theta,\varphi) \| = \psi(\theta).\Phi(\varphi) \backslash \| \psi(\theta) \| \| \Phi(\varphi) \|$

$y(\theta,\varphi) = P_{k,m}(\cos\theta) \quad e^{im\varphi} \backslash \sqrt{(2\pi)}.\sqrt{[(2/2k+1)(k+m)!/(k-m)!]}$

$y(\theta,\varphi) = \sqrt{[(2k+1)(k-m)!]}\, P_{k,m}(\cos\theta)e^{im\varphi} \backslash \sqrt{[4\pi (k+m)!]}$

$y_{0,0} = 1$, $y_{1,0} = \cos\theta$, $y_{1,1} = \sin\theta e^{-i\theta}$

$y_{2,0} = 1.5\cos^2\theta - 1/2$, $y_{2,1} = 3\sin\theta\cos\theta e^{i\theta}$, $y_{2,2} = 3\sin^2\theta e^{2i\theta}$

الصيغ التكاملية للجيب والجتا

لدينا من الصيغة الإختزالية للتكامل

$$\mathrm{I}_{n,m}=\int \sin^{m}x\cos^{n}x\,dx=\frac{\sin^{m-1}x\cos^{(n+1)}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I_{(m-2),n}$$

الحل

$$\left(\sin^{p}x\cos^{q}x\right)'=p\sin^{p-1}x\cos x\cos^{q}x$$
$$-q\sin^{p}x\cos^{q-1}x\sin x$$
$$=p\sin^{(p-1)}x\cos^{q+1}x-q\sin^{p+1}x\cos^{q-1}x$$
$$=p\sin^{p-1}x\cos^{q-1}x\left(1-\sin^{2}x\right)-q\sin^{p+1}x\cos^{q-1}x$$
$$=p\sin^{p-1}x\cos^{q-1}-p\sin^{p+1}x\cos^{q-1}-q\sin^{p+1}x\cos^{q-1}x$$
$$=p\sin^{p-1}x\cos^{q-1}x-\left(p+q\right)\sin^{p+1}x\cos^{q-1}x$$

بصوره أخرى

$$p\int \sin^{(p-1)}x\cos^{q-1}x\,dx-\left(p+q\right)\int \sin^{(p+1)}x\cos^{q-1}x\,dx$$
$$=\sin^{p}x\cos^{q}+c$$

ضع $p = m - 1$ و $q = n + 1$

$$\left(m-1\right)\int \sin^{(m-2)}x\cos^{n}x\,dx-\left(m+n\right)\int \sin^{m}x\cos^{n}x\,dx$$
$$=\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x$$
$$\left(m+n\right)\int \sin^{m}x\cos^{n}x\,dx=-\sin^{(m-1)}x\cos^{n+1}x$$

$$+(m+1)\int \sin^{(m-2)} x \cos^{n} x dx$$

$$\int \sin^{m} x \cos^{n} x dx = \frac{-\sin^{(m-1)} x \cos^{n+1} x}{m+n}$$

$$+\frac{m-1}{m+n}\int \sin^{(m-2)} x \cos^{n} x dx$$

$$\therefore \mathrm{I}_{n,m} = \frac{\sin^{(m-1)} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\mathrm{I}_{(m-2),n}$$

<u>الصيغة الأولى:</u>

$$\therefore \mathrm{I}_{2h,2k} = \frac{(2h)!\pi(2k)!}{2^{2h} h!(h+k)!k!2^{2k}}$$

بوضع $n = 2k \quad , \quad m = 2h$

$$\mathrm{I}_{2h,2k} = \int \sin^{2h} x \cos^{2k} x dx = \frac{\sin^{2h-1} x \cos^{2k+1} x}{2h+2k} + \frac{2h-1}{2h+2k} I_{(2h-2),2k} \qquad (1)$$

$$\mathrm{I}_{2h,2k} = \int_{0}^{\pi} \sin^{2h} x \cos^{2k} x dx = 0 + \frac{2h-1}{2h+2k} I_{(2h-2),2k} \qquad (2)$$

خاصية (1)

$$\int_0^{\pi}\cos^{2k}xdx=\frac{1.3.5...(2k-1)}{2.4.6...2k}\pi$$
$$=\frac{\pi}{2^k}\frac{1.3.5...(2k-1)}{1.2.3...k}$$
$$=\frac{\pi}{2^k k!}\frac{1.(2).3.(4).5...(2k-1)(2k)}{2.4.6...2k}$$
$$=\frac{(2k)!\pi}{2^k k!2^k!k}$$

$$\int_0^{\pi}\cos^{2k}xdx=\frac{\pi}{2^{2k}}\binom{2k}{k} \qquad (3)$$

$$\mathrm{I}_{2h,2k}=\frac{2h-1}{2h+2k}I_{(2h-2),2k}=...=$$
$$=\frac{(2h-1)(2h-3)...\left[2h-(2h-1)\right]}{(2h+2k)(2h+2k-2)...(2+2k)}\mathrm{I}_{0,2k}$$
$$=\frac{(2h-1)(2h-3)...\left[2h-(2h-1)\right]}{(2h+2k)(2h+2k-2)...(2+2k)}\mathrm{I}_{0,2k}$$
$$=\frac{(2h-1)(2h-3)...3.1}{2^h(h+k)(h+k-1)...(1+k)}\mathrm{I}_{0,2k}$$
$$=\frac{(2h-1)(2h-3)...3.1.k!}{2^h(h+k)!(2h-2)...4.2}\mathrm{I}_{0,2k}$$

$$=\frac{(2h)!k!}{2^h(h+k)!2h(2h-2)\ldots4.2}\mathrm{I}_{0,2k}$$

$$=\frac{(2h)!k!}{2^h(h+k)!2^h h(h-1)\ldots2.1}\mathrm{I}_{0,2k}$$

$$=\frac{(2h)!k!}{2^{2h}(h+k)!h!}\mathrm{I}_{0,2k}$$

$$\because \mathrm{I}_{0,2k}=\int_0^{\pi}\cos^{2k}x\,dx=\frac{(2k)!\pi}{2^k k!2^k!k}$$

$$\therefore \mathrm{I}_{2h,2k}=\frac{(2h)!k!}{2^{2h}(h+k)!h!}\frac{(2k)!\pi}{2^{2k}k!!k}=$$

$$\therefore \mathrm{I}_{2h,2k}=\frac{(2h)!k!}{2^{2h}(h+k)!h!}\frac{(2k)!\pi}{2^{2k}k!!k}$$

$$\therefore \mathrm{I}_{2h,2k}=\frac{(2h)!\pi(2k)!}{2^{2h}h!(h+k)!k!2^{2k}} \qquad (4)$$

<u>Example (1) :</u>

$$\int\sin^3 x\cos^3 x\,dx=\frac{(6)!\pi(6)!}{2^6 3!(3+3)!3!2^6}$$

$$=\frac{6\times5\times4\times\pi}{2^6 3!2^6}=\frac{5\pi}{2^{10}}$$

خاصية (2):

$$n! = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)! \qquad (5)$$

خاصية (3):

في حالة n فردي

$$\because I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \frac{2.4.6...(n-1)}{1.3.5...n}$$

$$\therefore I_{0,2k+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2k+1} x dx = \frac{2.4.6...(2k)}{1.3.5...(2k+1)}$$

$$= \frac{2^k.k!2.4.6...(2k)}{1.2.3...2k.(2k+1)}$$

$$= \frac{2^k.k!.2^k k!}{(2k+1)!}$$

$$\therefore I_{0,2k+1} = \frac{2^{2k}.k!.k!}{(2k+1)!} \qquad (6)$$

الصيغة الثانية

$$I_{2h,2k+1} = \frac{(2h)!(h+k)!K!2^{2k}}{(h!)(2h+2k+1)!} \qquad (7)$$

البرهـــــان :

$$I_{2h;2k+1}=\frac{2h-1}{2h+2k+1}I_{2h-2;2k+1}$$

$$=\frac{(2h-1)(2h-3)...3.1I_{0.(2k+1)}}{(2h+2k+1)(2h+2k-1)...(2k+3)}$$

$$=\frac{(2h)!(2h+2k)(2h+2k-2)...(2k+4)I_{0.(2k+1)}}{2^{h}+h!(2h+2k+1)(2h+2k)...(2k+3)}$$

$$=\frac{(2h)!(2h+2k)(2h+2k-2)...(2k+4)(2k+2)!I_{0.(2k+1)}}{2^{h}.h!(2h+2k+1)!k!}$$

$$I_{0,2k+1}=\frac{2^{2k}k!k!}{(2k+1)!}$$

لكن

$$I_{2h;2k+1}=\frac{(2h)!(h+k)!(2k+1)!2^{2k}k!k!}{h!(2h+2k+1)!k!(2k+1)!}$$

$$=\frac{(2h)!(h+k)!k!2^{2k}}{h!(2h+2k+1)!}$$

Example (2) :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{4}\times\cos^{3}\times dx$$

$$I_{4,3}=\frac{4!3!1!2^{2}}{7!2!}$$

$$= \frac{4!3\times 2\times 1\times 4}{7\times 6\times 5\times 4!\times 2} = \frac{2}{32}$$

الصيغة الثالثة :

$$I_{2h+1,2k} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2h+1} \times \cos^{2k} \times dx$$

$$I_{2h+1;2k} = \frac{(2k)!(h+k)!2^{2h} h!}{k!(2h+2k+1)!}$$

البرهـــــــان :

انطلاقا من الصيغة الاولى :

$$I_{2h;2k} = \frac{(2h)!\frac{\pi}{2}(2k)!}{2^{2h} h!(h+k)!k!2^{2k}}$$

$$I_{2h+1;2k} = \frac{(2h+1)!\frac{\pi}{2}(2k)!}{2^{2h+1}(\frac{2h+1}{2})!(\frac{2h+2k+1}{2})!k!2^{2k}}$$

ومن خاصية (2) فان :

$$(\frac{2h+1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi}(2h+1)!}{2^{2h+1} h!}$$

$$(\frac{2h+2k+1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi}(2h+2k+1)}{2^{2h+2k+1}(h+k)!}$$

الصيغة الثالثة

$$I_{2h+1;2k}=\frac{(2k)!(h+k)!2^{2h}h!}{k!(2h+2k+1)!}$$

Example (3) :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\times\cos^6\times dx$$

2k=6 2h+1=7

$$I_{7;6}=\frac{6!6!2^6 3!}{3!(13)!}=\frac{6!2^6 3!}{13\times12\times11\times10\times9\times8\times7}=\frac{8}{3003}$$

الصيغة الرابعة ***Beta Function*** :

$$I_{2h+1;2k+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2h+1}\times cox^{2k+1}\times dx \qquad (9)$$

$$I_{2h+1;2k+1}=\frac{h!k!}{2(h+k+1)!}$$

البرهـــــــان :

انطلاقا من الصيغة الاولى :

$$I_{2h;2k}=\frac{(2h)!\frac{\pi}{2}(2k)!}{2^{2h}h!(h+k)!k!2^{2k}}$$

ضع $2k\equiv 2k+1$ ، $2h\equiv 2h+1$

$$I_{2h+1;2k+1}=\frac{(2h+1)!\frac{\pi}{2}(2k+1)!}{2^{2h+1}(\frac{2h+1}{2})!(\frac{2h+2k+2}{2})!(\frac{2k+1}{2})!2^{2k+1}}$$

ومن خاصية (2) فان :

$$(\frac{2h+1}{2})!=\frac{\sqrt{\pi}(2h+1)!}{2^{2h+1}h!}$$

$$(\frac{2k+1}{2})!=\frac{\sqrt{\pi}(2k+1)!}{2^{2k+1}k!}$$

الصيغة الرابعة

$$\therefore I_{2h+1;2k+1}=\frac{h!k!}{2(h+k+1)!}$$

<u>Example (4) :</u>

$$I_{3,3}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\times cox^3\times dx\Rightarrow 2\underset{h=1}{h+1}=3,2\underset{k=1}{k+1}=3$$

$$\therefore I_{3,3}=\frac{1!1!}{2\times 3!}=\frac{1}{2\times 6}=\frac{1}{12}$$

نتيجة : واضح ان الصيغة الرابعة تكافئ وتتكهن بدالة بيتا

دالة بيتا

$$I=\int_{0}^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=B(\alpha;\beta)$$

حيث
$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

الحل : ضـــــــع $x=\sin^2\Theta$

$$dx=2\sin\Theta\cos\Theta\, d\Theta$$

$$I=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha-2}\Theta\cos^{2\beta-2}\Theta\sin\Theta\cos\Theta d\Theta$$

$$I=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha-1}\Theta\cos^{2\beta-1}\Theta d\Theta \qquad (10)$$

ولدينا من الصيغة الرابعة :

$$I_{2h+1;2k+1}=\frac{h!k!}{2(h+k+1)!}$$

ضع $h=\alpha-1$ و $k=\beta-1$

$$2h+1=2\alpha-1 \qquad 2k+1=2\beta-1$$

$$\therefore I_{2\alpha-1,2\beta-1}=\frac{(\alpha-1)!(\beta-1)!}{2(\alpha+\beta-1)!}$$

من معادلة (10) فان :

$$I = 2I_{2\alpha-1,2\beta-1} = \frac{2(\alpha-1\_!(\beta-1)!}{2(\alpha+\beta-1)!}$$

$$= \frac{(\alpha-1)!(\beta-1)!}{(\alpha+\beta-1)!}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$= B(\alpha,\beta)$$

Refrences

[1] William . R . Derrick And Grosman : Elementary Differential Equations With Application . Wesley Publishing Company INC . U.S.A , Massachusetts . 1978

$[1]_1$ page 20

$[1]_2$ page 32

$[1]_3$ page 37

$[1]_4$ page 79

$[1]_5$ page 88

$[1]_6$ page 210

$[1]_7$ page 275

$[1]_8$ page 492

$[1]_9$ page 346

[2] Zill ; Dennis G : A First Course In Ordinary Differential Equation ; Prhndle,Weber And Shmidt , U.S.A , Bosron 1979.

$[2]_1$ page 62

$[2]_2$ page 224

$[2]_3$ page 173

$[2]_4$ page 232

$[2]_5$ page 396

$[2]_6$ page 427

$[2]_7$ page 438

[3] Copson , E.T : An Introduction To The Theory of Functions of A Complex Varhable ; Oxford University Press 1985. page 246

[4] Pinsky ; Mark A : Partial Differential Equations And Boundary – Value Problems With Applications ; McGraw-Hill . 1998.

$[4]_1$ page261

$[4]_2$ page 254 , 262

$[4]_3$ page 7

$[4]_4$ page 171 , 234

$[4]_5$ page 235 , 276

[5] Schiff ; L.I : Quantum Mechanics ; McGraw-Hill . 1968.

$[5]_1$ page 70

[5]$_2$ page 92

[5]$_3$ page 71

[5]$_4$ page 93

[6] Kolman , Bernard : Elementary Linear Algebra ; Macmillan Publishing Co . INC , U.S.A , New York . 1982.page 301

[7] Burdin; Richard L : Numerhcal Analysis , PWS-kent

Publishing Company , U.S.A , Boston . 1981.

[7]$_1$ Page 199

[7]$_2$ page 136

[8] Frank : Differential Equations , Schum Serhes , McGraw-Hill . 1972. page 203

[9] Apostol : Mathematical Analysis ; Adidison - Wesley Publishing Company INC . U.S.A , Massachusetts . 1979.page 306

[10] Rudin : Principles Of Mathematical Analysis ; ; McGraw-Hill . 1985.page 185

[11] Brown And Churchill : Fourier Series And Boundary Value Problems , ; McGraw-Hill . 1993.

[11]1 page 17

[11]2 page 110

[11]3 page 119

[11]4 page 145

[12] Vvedensky . D : Partial Differential Equations , Wesley Publishing Company INC . U.S.A , Massachusetts . 19 93

[12]1 page 143

[12]2 page 262

[13] Mathews P.M : A Text Book Of Quantum Mechanics, Tata McGraw-Hill , New Delhi . 1976.page 191;321

[14] Dettman ; John D : Applied Complex Variables. Macmillan Publishing Co . INC , U.S.A , New York . 1965. page 348 .

[15] Fowles;Grant R : Analytical Mechanics ; Holt ; Rinehart And Winston . New York .1977;page 150-152